МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

К. О. Метешкін
Д. В. Шаульський

МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки, молоді і спорту України
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів

Харків
ХНАМГ
2012

УДК 528.85(075)
ББК 26.11я73-6+22.172я73-6
М54

Рецензенти:

А. І. Колосов, д. ф.-м. н., професор (Харківська національна академія міського господарства);

А. Б. Ачасов, д. с-г. н., професор (Харківський національний аграрний університет ім. В. В. Докучаєва);

В. М. Ілюшко, д. т. н., професор (Харківський національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «ХАІ»)

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки, молоді і спорту України
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів
Лист № 1/11-2644 від 28.02.2012 р.

Метешкін К. О.

М54 Математична обробка геодезичних вимірів: навч. посібник / К. О. Метешкін, Д. В. Шаульський; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. – Х.: ХНАМГ, 2012. – 176 с.

ISBN 978-966-695-274-8

В навчальному посібнику розглянуті основні питання застосування теорії похибок та способу найменших квадратів для обробки та зрівнювання результатів геодезичних вимірів. Інноваційний характер викладу навчального матеріалу полягає у переході до сучаснішої форми викладання навчальних дисциплін у вигляді опису технологій навчання і моделей професійних знань викладачів.

Навчальний посібник призначений для студентів напряму підготовки «Геодезія, картографія та землеустрій» вищих навчальних закладів.

УДК 528.85(075)
ББК 26.11я73-6+22.172я73-6

ISBN 978-966-695-274-8

ЗМІСТ

ВСТУП

Навчальний матеріал цього посібника стосується однієї з найбільш наукоємних дисциплін, які використовують під час підготовки студентів за напрямом «Геодезія, картографія та землеустрій». Він створювався на основі навчально-методичного посібника «Теория математической обработки геодезических измерений» (російською мовою), автором якого є Войславський Л.К. Змістова частина посібника доповнена новим навчальним і ілюстративним матеріалом, а також скорегована його структура і назва.

У зв'язку з останніми досягненнями педагогічної науки і практики, а також тенденціями навчального процесу у вищих навчальних закладах у вигляді технологій, навчальний матеріал розроблявся так, щоб він був змістовою основою прикладної технології навчання. Тому перший змістовий модуль містить відомості стосовно основних параметрів і структури технології навчання, цільові установки, використану термінологію, логічні зв'язки навчального матеріалу з іншими дисциплінами навчального плану, а також особливості вивчення навчального матеріалу. Така структура початкової частини навчального матеріалу дає можливість: по-перше, для викладача – краще орієнтуватися в навчальному матеріалі і скоротити час для підготовки до занять; по-друге, для студентів очного відділення – структурувати свої знання, побачити їх місце в системі набутих знань; по-третє, для студентів заочного відділення – з високим ступенем самостійності вивчити запропонований їм навчальний матеріал.

Навчальний матеріал розділений на 2 модулі. Перший модуль містить 8 змістових модулів, у яких викладені методи, способи застосування теорії похибок в обробці геодезичних даних. Другий – складається з чотирьох змістових модулів, у яких розглядається зрівнювання результатів геодезичних вимірів за методом найменших квадратів.

Розроблений навчальний матеріал забезпечується інформаційною підтримкою, тобто посиланнями на додаткові джерела інформації (літературу і адреси в Інтернеті), має лінгвістичне забезпечення у вигляді невеликого тезауруса, а також довідкові дані, які розміщені в додатку.

Інноваційний характер викладу навчального матеріалу передбачає експериментальні дослідження з метою оцінювання доцільності переходу від традиційного викладання навчального матеріалу у вигляді методичних вказівок і посібників до сучаснішої форми викладання навчальних дисциплін у вигляді опису технологій навчання і моделей професійних знань викладачів. Технологічний підхід до подання навчального матеріалу, на наш погляд, забезпечить ширше застосування інформаційних технологій в освіті.

Автори висловлюють глибоку вдячність колективу кафедри, який надавав всіляку підтримку при написанні цього матеріалу. Особливо професорові В.Д. Шипуліну за консультації з питань математики і застосування її методів у геодезії. Старшому викладачеві І.С. Глушенковій, яка допомагала розібратися з особливостями геодезичних вимірів. Доцентові кафедри Геоінформаційних систем і геодезії І.М. Патракєєву за чуйність і виявлену довіру у вдосконаленні навчальної дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів», а також за умови, які він створив для плідної роботи над навчальним матеріалом.

1. ОСНОВНІ ВІДОМОСТІ ПРО ТЕХНОЛОГІЮ НАВЧАННЯ

1.1. Параметри технології навчання і ієрархія її цільових установок

Цей навчальний матеріал адаптований під технологію навчання і є складовою частиною освітньої стандартизованої технології за напрямом 6.080101 «Геодезія, картографія та землеустрій».

Під освітньою стандартизованою технологією розуміють процес, який має чіткі межі залежно від освітнього кваліфікаційного рівня підготовки фахівця, заснований на Державних освітніх стандартах (навчальному плані, структурно-логічній схемі, освітньо-кваліфікаційній характеристиці, освітньо-професійній програмі), які реалізують *стратегію групового педагогічного рішення* і є сукупністю взаємозв'язаних технологій навчання студентів окремим дисциплінам.

Дисципліна входить до блоку професійно-орієнтованих дисциплін.

Відповідно до освітнього стандарту технологія навчання має наступні параметри:

- **об'єкт вивчення**: математичний апарат, що забезпечує обробку геодезичних вимірів і інтерпретацію геоданих у геоінформаційних системах;
- **предмет вивчення**: математичні методи обробки геодезичних вимірів;
- **початок реалізації** технології навчання: 2 курс;
- **тривалість реалізації** технології навчання: 3 – 4 семестр;
- **об'єм** теоретичного матеріалу: 33 години;
- **об'єм** лабораторної практики 66 годин;
- **діагностика** знань і умінь: атестація (3, 4 семестр), іспит (3 семестр), залік (4 семестр);
- **правове забезпечення**: державний стандарт вищої освіти вищого навчального закладу за напрямом 7.070908 «Геоінформаційні системи і технології»;
- **технічне забезпечення**: засоби інформатики і оргтехніка;
- **програмне забезпечення**: Microsoft PowerPoint, тестові програми і інше.
- **інформаційно-технологічне забезпечення**: підручники, навчальний посібник, Інтернет, інструкції і інше;
- **лінгвістичне забезпечення**: комбіноване (у письмовій і усній формах) із використанням природної мови, мови математики і мови інтерфейсів PowerPoint, Excel, Windows та інше;

- **математичне забезпечення**: методи теорії вірогідності, математичної статистики, метрології, теорії вимірів, теорії похибок, методи лінійної алгебри і інше;

- **технологію навчання спроектував**: доктор технічних наук, доцент К.О. Метешкін.

В основу реалізації стратегії технології навчання покладена ієрархічна система навчальних цільових установок, результатом досягнення яких є знання і уміння студентів. Ієрархія цільових установок технології навчання і результати їх досягнення структуровані і зведені в табл.1.1.

Таблиця 1.1 – Ієрархія цільових установок технології навчання і результати їх досягнення

Навчальні цілі	**Результати досягнення навчальних цілей (знання і уміння)**
1	2
Технології навчання: сформувати у студентів випускного курсу структуровані знання, необхідні для вирішення типових завдань на первинних посадах, передбачених освітньо-кваліфікаційною характеристикою.	**Знання** сукупності математичних методів обробки і інтерпретації геоданих. **Уміння** застосовувати ті або інші методи обробки і інтерпретації геодезичних вимірів.
Модуль 1. Вивчити основні методи теорії похибок вимірів Змістовий модуль 1. Сформувати у студентів узагальнене уявлення про навчальний матеріал і методи його викладання.	**Евристичні знання**, що дозволяють студентам орієнтуватися в тій предметній галузь, що вивчається, і самостійно вивчати додатковий матеріал. **Знання** про структуру навчального матеріалу, послідовності його вивчення і загальних характеристиках технології його вивчення.
Змістовий модуль 2. Доповнювати лексичну базу студентів новими термінами і сутнісними визначеннями метрології.	**Знання** основних термінів теорії вимірів і їх визначення.
Змістовий модуль 3. Сформувати у студентів уявлення про правила оцінювання точності вимірів у геодезії	**Знання** правил оцінювання точності вимірів у геодезії і **уміння** застосовувати їх на практиці
Змістовий модуль 4. Сформувати у студентів уявлення про оцінювання точності функцій безпосередньо виміряних величин.	**Знання** про процедури оцінювання точності функцій безпосередньо виміряних величин.

Продовження табл. 1.1

1	2
<u>Змістовий модуль 5.</u> Сформувати у студентів знання про процедури математичної обробки рівноточних вимірів однієї і тієї ж величини. <u>Змістовий модуль 6.</u> Сформувати у студентів уявлення про нерівноточні виміри. <u>Змістовий модуль 7.</u> Сформувати у студентів уявлення про подвійні виміри. <u>Змістовий модуль 8.</u> Сформувати у студентів загальне уявлення про залежні випадкові величини і залежні похибки.	**Знання** про процедури математичної обробки рівноточних вимірів однієї і тієї ж величини і **уміння** їх застосовувати на практиці. **Знання** суті процедур рівноточного вимірювання і **уміння** їх застосовувати на практиці. **Знання** суті процедур подвійного вимірювання і **уміння** їх застосовувати на практиці. **Знання** суті вимірювання залежних випадкових величин і залежних похибок.
Модуль 2. Вивчити один з методів теорії похибок для оцінки невідомих величин за наслідками геодезичних вимірів які містять випадкові помилки. <u>Змістовий модуль 1.</u> Вивчити основні відомості про метод найменших квадратів. <u>Змістовий модуль 2.</u> Вивчити параметричний спосіб врівноважування випадкових величин. <u>Змістовий модуль 3.</u> Вивчити методи зрівнювання вимірюваних величин, пов'язаних умовами.	**Знання** інструментальних можливостей методу найменших квадратів при обробці геодезичних вимірів і **уміння** його застосування на практиці. **Знання** основних можливостях методу найменших квадратів при обробці геодезичних вимірів. **Знання** параметричного способу зрівнювання випадкових величин і **уміння** його застосування на практиці. **Знання** можливостей методу зрівнювання вимірюваних величин, пов'язаних умовами.

1.2. Зміст навчального модуля

Модуль 1.

ЗМ. 1. Основні відомості про технологію навчання

1.1. Параметри технології навчання і ієрархія її цільових установок.

1.2. Зміст навчальних модулів.

1.3. Термінологічна модель змісту навчального матеріалу.

1.4. Схема технології навчання як складова частина структурно-логічної схеми підготовки фахівця.

1.5. Особливості вивчення навчального матеріалу.

ЗМ. 2. Загальні відомості про метрологію

2.1. Історичні відомості про геодезію і метрологію

2.2. Загальна характеристика математичних методів обробки геодезичних вимірів.

2.3. Поняття фізичної величини.

2.4. Вимірювання і їх класифікація.

2.5. Похибки вимірів і їх класифікація..

2.6. Властивості випадкових похибок.

ЗМ. 3. Кількісні критерії оцінювання точності вимірів

3.1. Моделі розподілу випадкових похибок вимірів.

3.2. Моделі розподілу систематичних похибок вимірів.

3.3. Кількісні критерії оцінювання точності ряду рівноточних вимірів однієї величини.

ЗМ. 4. Оцінка точності функцій безпосередньо вимірюваних величин

4.1. Основна теорема теорії похибок і її застосування для розрахунку гранично припустимих нев'язок.

4.2. Апостеріорна оцінка точності функцій вимірюваних величин.

ЗМ. 5. Математична обробка ряду рівноточних результатів вимірів однієї і тієї ж величини

5.1. Проста арифметична середина і її властивості.

5.2. Формула емпіричної середньоквадратичної похибки.

5.3. Послідовність математичної обробки ряду рівноточних вимірів однієї і тієї ж величини.

ЗМ. 6. Метод нерівноточних вимірів

6.1. Вага як спеціальна міра відносної точності результатів нерівноточних вимірів.

6.2. Вага функцій результатів вимірів.

6.3. Приклади розрахунку ваги в геодезичній практиці.
6.4. Загальна арифметична середина і її властивості.
6.5. Формула емпіричної середньоквадратичної похибки одиниці ваги.
6.6. Послідовність математичної обробки ряду нерівноточних вимірів однієї і тієї ж величини.

ЗМ. 7. Метод подвійних вимірів

7.1. Загальні міркування про метод подвійних вимірів.
7.2. Оцінювання точності за різницями подвійних рівноточних вимірів.
7.3. Оцінювання точності за різницями подвійних нерівноточних вимірів.

ЗМ. 8. Короткі відомості про залежні випадкові величини і залежні похибки

8.1. Види залежностей.
8.2. Кількісні характеристики лінійної стохастичної залежності.
8.3. Залежні випадкові похибки в геодезії.

Модуль 2.

ЗМ. 1. Зрівнювання результатів геодезичних вимірів методами математичної статистики

1.1. Сутність задачі зрівнювання результатів вимірів в геодезії
1.2. Два підходи до розв'язання задачі зрівнювання геодезичних побудов.
1.3. Сутність і обґрунтування методу найменших квадратів, його використання у зрівнюванні геодезичних побудов.

ЗМ.2. Параметричний спосіб зрівнювання геодезичних побудов

2.1. Постановка задачі. Рівняння поправок.
2.2. Мінімум $[V^2]$. Нормальні рівняння.
2.3. Матричне представлення параметричного методу зрівнювання. Розв'язання нормальних рівнянь.
2.4. Оцінка точності вирівняних значень невідомих геодезичних вимірів.
2.5. Обчислення емпіричної середньоквадратичної похибки за поправками, отриманими у результаті зрівнювання.
2.6. Середньоквадратична похибка виміряних величин після зрівнювання.
2.7. Зрівнювання і оцінка точності при нерівноточних вимірах.

2.8. Приклади складання рівнянь нев’язок для різних видів геодезичних вимірів і геодезичних мереж.
2.9. Зрівнювання трилатерації (лінійна засічка).
2.10. Зрівнювання системи нівелірних ходів.

ЗМ. 3. Метод зрівнювання виміряних величин, пов'язаних умовами
3.1. Постановка задачі. Умовні рівняння.
3.2. Умовний мінімум $[V^2]$. Нормальні рівняння корелят і їх розв'язання.
3.3. Оцінювання точності функцій зрівняних величин.
3.4. Обчислення емпіричної середньоквадратичної похибки за поправками і середньоквадратичною похибкою вирівняних величин.
3.5. Зрівнювання і оцінка точності нерівноточних вимірів.
3.6. Зрівнювання тріангуляції.
3.7. Зрівнювання систем нівелірних ходів.

ЗМ. 4. Зрівнювання систем виміряних величин, пов'язаних умовами, із додатковими невідомими
4.1. Загальні відомості.
4.2. Підведення підсумків курсу.

1.3. Мережева модель технології навчання

Мережева модель технології навчання дає уявлення про вивчення навчального матеріалу розподіленого в часі. Надано процес досягнення поставлених цілей у вигляді мережевої (семантичної) моделі, де її вершини відповідатимуть процедурам проведення занять як теоретичних, так і дослідницьких у вигляді лабораторних робіт (див. рис.1.1). Мережева модель ставить у відповідність змістові модулі і об'єм конкретних видів занять. Мережева модель містить декілька видів стосунків «Л – Лр», «Лр –Л», «Лр – Лр», «Лр – І», «Лр – З». Крім того, два види вершин мережевої моделі жорстко впорядковані. Строгий порядок мають вершини Лi $i = \overline{1,16}$, а Лрj $j = \overline{1,36}$. Такий порядок забезпечує послідовне вивчення теоретичного матеріалу і його закріплення у процесі виконання лабораторних робіт. Окремі вершини помічені спеціальним чином, що позначає заняття на яких здійснюються процедури діагностики знань і умінь студентів за пройденим матеріалом, а також заняття на яких видаються розрахунково-графічні завдання.

МЕРЕЖЕВА МОДЕЛЬ ТЕХНОЛОГІЇ НАВЧАННЯ (МОДУЛЬ 1)

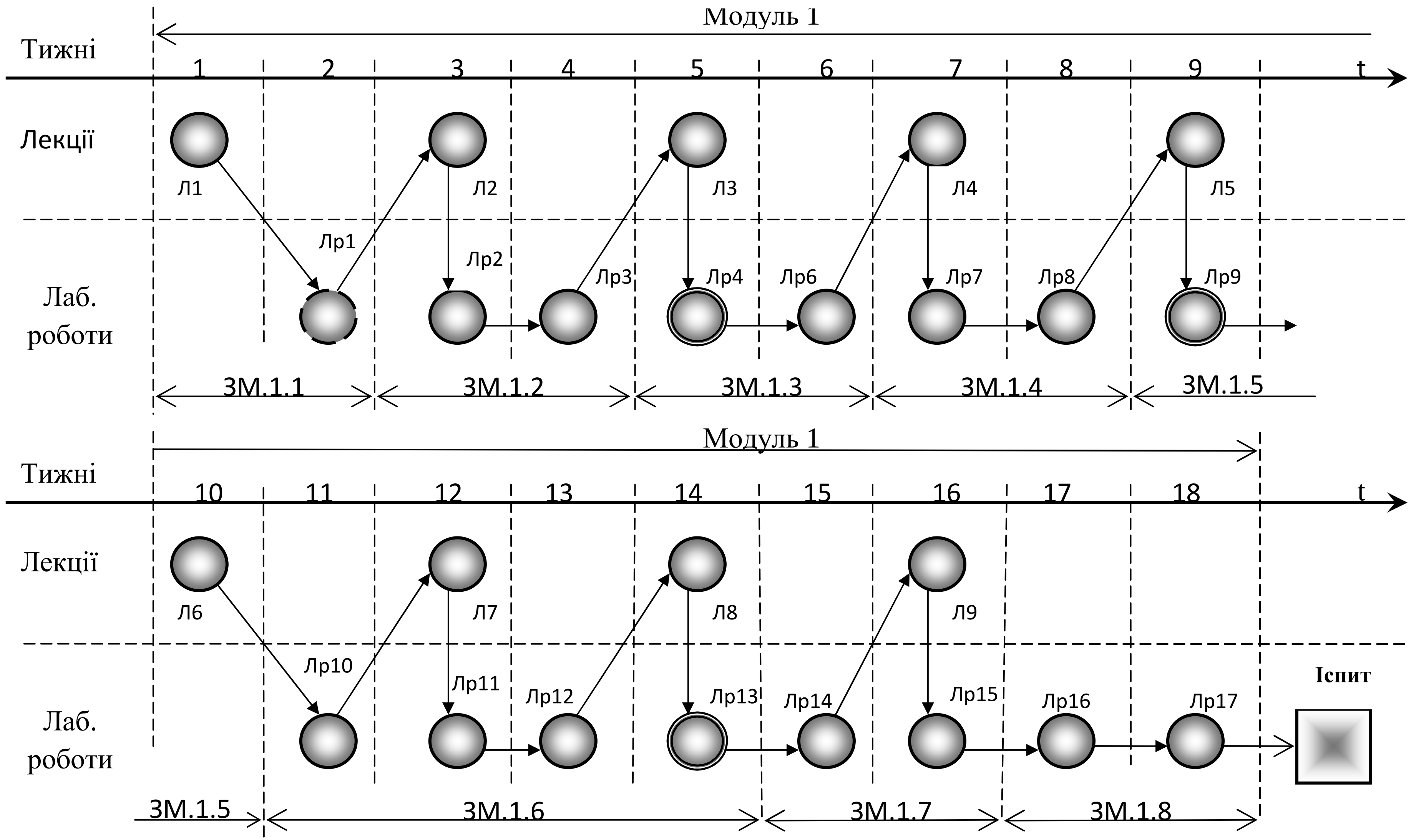


Рис. 1.1 – Мережева модель викладання навчального матеріалу

МЕРЕЖЕВА МОДЕЛЬ ТЕХНОЛОГІЇ НАВЧАННЯ (МОДУЛЬ 2)

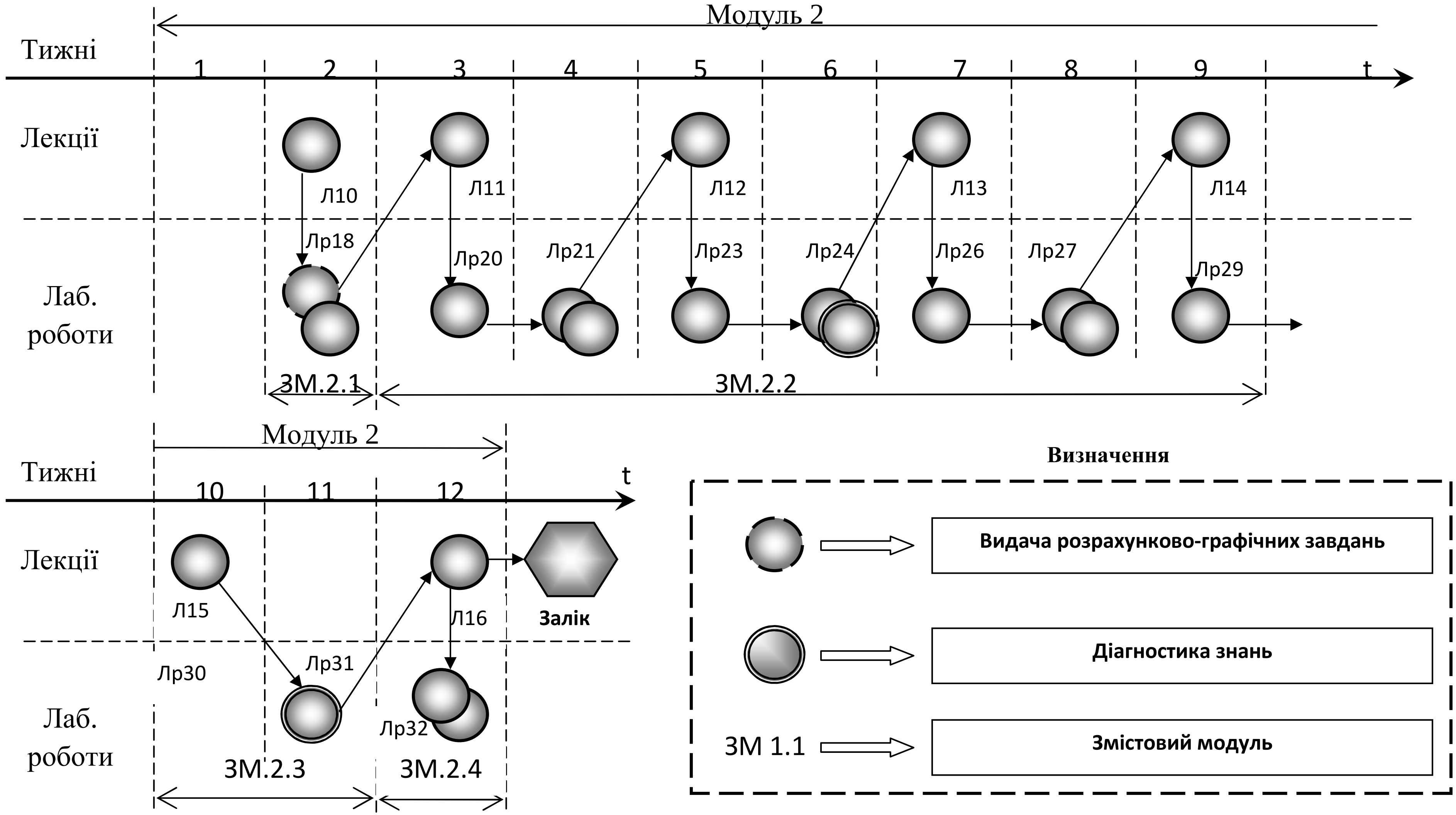


Рис. 1.1 – Мережева модель викладання навчального матеріалу (продовження)

1.4. Термінологічна модель змісту навчального матеріалу

Предметом вивчення навчальної дисципліни є методи обробки геодезичних вимірів. Тому як корінне поняття термінологічної моделі навчальної дисципліни оберемо термін «метрологія». На рис.1.2 ілюструється узагальнена схема формування понять науки про виміри - метрології. Тут в якості термінів, що забезпечують розуміння навчального матеріалу використовують терміни і визначення вимірів у геодезії і інструментальних математичних засобах (методи, способи, теорії).

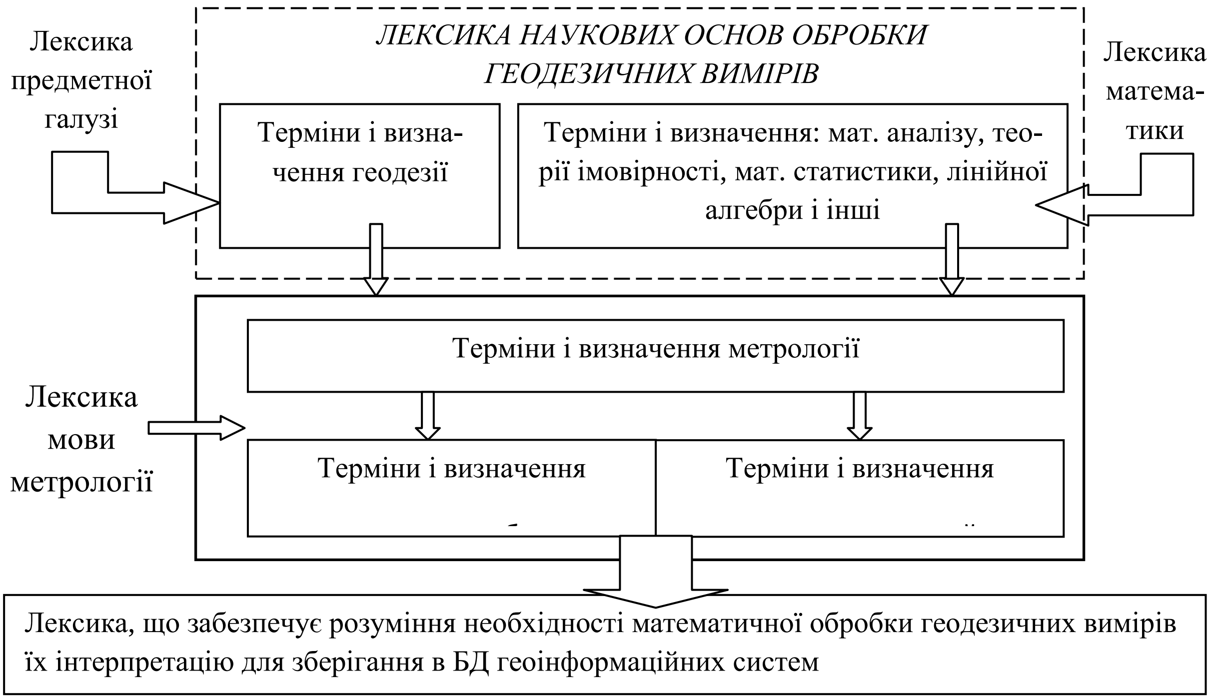


Рис. 1.2 – Узагальнена схема формування понять метрології

У процесі вивчення навчального матеріалу студенти повинні сформувати термінологічну і понятійну базу певного навчального матеріалу, яку надалі використають при вивченні картографії, геоінформаційних систем, вищої геодезії і таке інше. У верхній частині рис. 1.2 показано, що розпочинаючи вивчення цього навчального матеріалу студенти повинні вже володіти термінологією курсу «геодезія», а також термінами і основними поняттями математичного інструментарію. Термінологія цього навчального матеріалу представлена в додатку **А** у вигляді тезауруса.

1.5. Схема технології навчання як складова частина структурно-логічної схеми підготовки фахівця

Освітні стандарти вищого навчального закладу за напрямом 6.080101– «Геодезія, картографія та землеустрій», зокрема навчальний план, припускає реалізацію технології навчання «Математична обробка геодезичних вимірів» на 2 курсі (3 і 4 семестри). Технологія навчання, яку розробили, спирається на знання студентів, які вони повинні отримати на першому курсі під час вивчення «Вищої математики», «Геодезії», «Фізики», «Інформатики і програмування», а також інших дисциплін (див. рис. 1.3).

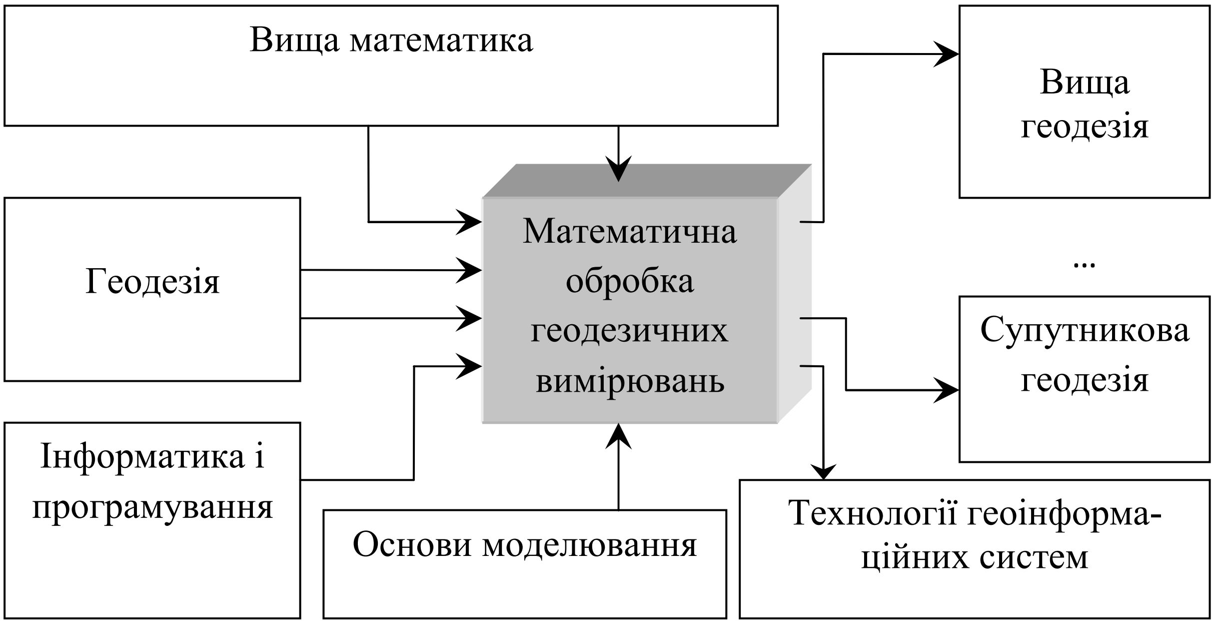


Рис. 1.3 – Фрагмент структурно-логічної схеми, що демонструє зв'язки технології навчання з іншими дисциплінами навчального плану

Паралельно на другому курсі продовжується математична підготовка студентів з дисциплін «Вища математика» і «Основи моделювання». Ці навчальні дисципліни дозволяють успішно реалізувати технологію навчання: «Основи математичної обробки геодезичних вимірів». Така логіка побудови процесу формування професійних знань студентів на першому і другому курсах забезпечує успішне вивчення спеціальних дисциплін, таких як: «Вища геодезія», «Картографія», «Супутникова геодезія», «Основи геоінформаційних систем», «Технології геоінформаційних систем» і інші.

Логіка формування професійних знань студентів ілюструється рис.1.3, де показаний фрагмент структурно-логічної схеми підготовки фахівця з урахуванням вивчення навчального матеріалу з математичної обробки геодезичних вимірів.

Таким чином, фрагментарно показане місце навчальної дисципліни, яке вона займає при підготовці студентів за фахом.

1.6. Особливості вивчення навчального матеріалу

Досвід викладання навчального матеріалу, наведеного в посібнику, показує, що він викликає при його вивченні певні труднощі. Крім того, певні труднощі виникали і у автора, який спробував на основі відомої літератури і освітніх стандартів систематизувати навчальний матеріал і подати його у вигляді змістової основи технології навчання.

Однією з основних особливостей цього матеріалу є те, що він максимально наближений до розв'язання практичних завдань геодезії і в ньому відсутні математичні методи і моделі, які рідко використовують або взагалі не використовують у геодезії. Окрім того, *мова*, якою викладено навчальний матеріал, містить лексику, що є сукупністю термінів декількох предметних галузей і наук, – геодезії, метрології, математичного аналізу, теорії похибок, теорії ймовірностей і математичної статистики. Сумісне використання методичних баз цих наук і теорій зумовлює складність морфологічних і синтаксичних правил граматики професійної мови, на якій викладений навчальний матеріал. Таку мову можна назвати природно-математичною, оскільки, з одного боку, нею викладені основні визначення і коментарі до них, задані умови розв'язання прикладів і таке інше. З іншого боку, на основі математичних символів (алфавіту математичної мови) і правил побудови формул і складніших математичних конструкцій (морфології і синтаксису математичної мови) абстрактно і формально показані співвідношення між виміряними фізичними величинами, які призводять до їх кількісного оцінювання.

Ускладнює мову викладу навчального матеріалу одночасне використання сучасної символіки математичної мови, із символікою запровадженою ще К.Ф. Гауссом, яка за традицією, використовується при описі методів обробки вимірів. Наприклад, одночасно при складанні математичних формул використовують символ суми «[ ]», що запроваджений К.Ф. Гаусом і сучасний символ у вигляді заголовної грецької букви $\sum$.

Ще одна особливість, яку необхідно враховувати при вивченні навчального матеріалу, – це подібність понять «Приріст змінної» і «похибки вимірювання». Перше поняття лежить в основі диференціального числення, друге складає основу теорії похибок. Смисловим змістом цих понять є різниця. У диференціальному численні це різниця між фіксованою точкою X_0 і довільною точкою X, яка лежить в деяких межах фіксованої точки. У теорії похибок це різниця між дійсним і виміряним значеннями вимірюваної величини Δ. Тому диференціальне числення як математичний інструментарій при обробці геодезичних вимірів відіграє важливу роль.

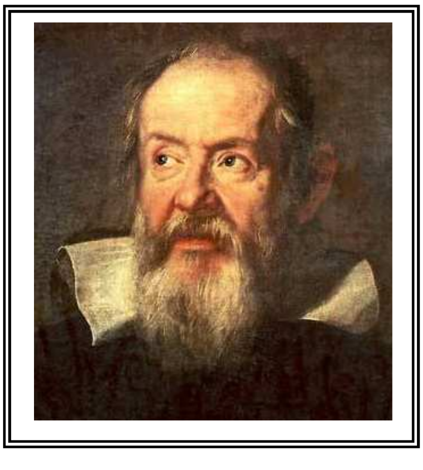
2. ОСНОВНІ ВІДОМОСТІ З МЕТРОЛОГІЇ

2.1. Витоки математичного оцінювання геодезичних вимірів. Видатні науковці

Джерела розв’язання завдань, пов'язаних з вимірюваннями земельних ділянок, орієнтацією людини в просторі і часі йдуть в глибину століть. Людству знадобилися тисячоліття для того, щоб навчитися вимірювати великі відстані з урахуванням пересіченої місцевості, а також на основі вимірів добре орієнтуватися в просторі і часі.

Основою геодезичної науки за правом вважають астрономію і математику, зокрема геометрію. Вони дозволили людині перейти від якісних спостережень до кількісного оцінювання, а потім і до математичного опрацювання відповідних вимірів.

Справедливо можна вважати Галілео Галілея (див. рис. 2.1) за першого природодослідника, який на основі точних математичних (кількісних) розрахунків зробив безліч відкриттів у природознавстві.



ГАЛІЛЕЙ (Galilei) Галілео (1564—1642) — італійський мислитель епохи Відродження, основоположник класичної механіки, астроном, математик, фізик, один із засновників сучасного експериментально-теоретичного природознавства, засновник нової механістичної натурфілософії. Першим здійснив парадигмальне розмежування природознавства і філософії. (За Гете, Р. "помер в той рік, коли народився Ньютон. Це — свято Різдва нашого нового часу"). Професор Пізанського університету (з 1589), після вимушеного від'їзду з Пізи працював на кафедрі математики Падуанського університету (1592—1610 р.р.).

Рис. 2.1 – Видатний мислитель епохи Відродження

Наприклад, використовуючи експериментальний метод, виявив лібрацію Луни (невеликі періодичні погойдування Луни відносно її центру). Чисельні експериментальні дослідження, які проводив Г. Галілей, супроводжувалися вимірюваннями різних фізичних величин. Саме Г. Галілею належить фраза: «Той, хто хоче розв’язувати питання природних наук без допомоги математики, ставить завдання, що не розв'язується. Слід вимірювати те, що вимірюється, і робити вимірюваним те, що таким не є».

Величезна заслуга Г. Галілея полягає в тому, що він запропонував експериментально-теоретичний метод досліджень, який ще й досі використовує сучасна наука. Винайдені ним прилади: телескоп, мікроскоп, гідростатичні ваги для визначення питомої ваги твердих тіл, пропорційний циркуль, який використовують у креслярській справі, та інше дозволяли проводити дослідження методом вимірювання перебігу різних процесів і явищ. Це дає підставу вважати, що саме Г. Галілей стояв біля витоків створення метрології, теорії вимірів і теорії похибок.

Сучасниками Г. Галілея були видатні математики Рене Декарт (1596 – 1650 р.р.) і П'єр Ферма (1601 – 1665 р.р.). Видатна заслуга Р. Декарта (див. рис. 2.2) полягає в описі методу, який передбачає досягнення достовірного знання. Він описаний в роботі «Міркування про метод, щоб вірно спрямовувати свій розум і відшукувати істину в науках».

РЕНЕ ДЕКАРТ (фр. Rene Descartes; лат. Renatus Cartesius — Картезій; 31 березня 1596, Лае (провінція Турень), нині Декарт (департамент Ендр і Луара) — 11 лютого 1650, Стокгольм) — французький математик, філософ, фізик і фізіолог, творець аналітичної геометрії і сучасної символіки алгебри, автор методу радикального сумніву у філософії, механіцизму у фізиці, передвісник рефлексології.

Афоризм

Усі науки настільки пов'язані між собою, що легше вивчати всі відразу, ніж будь-яку одну окремо від усіх інших.

Рис. 2.2 – Видатний математик епохи Відродження

Тут він виділяє чотири положення, які характеризують метод досягнення достовірного знання:

1) починати з безперечного і самоочевидного, тобто з того, протилежне якому не можна уявити;

2) розділяти будь-яку проблему на стільки частин, скільки необхідно для її ефективного розв'язання;

3) починати з простого і поступово просуватися до складного;

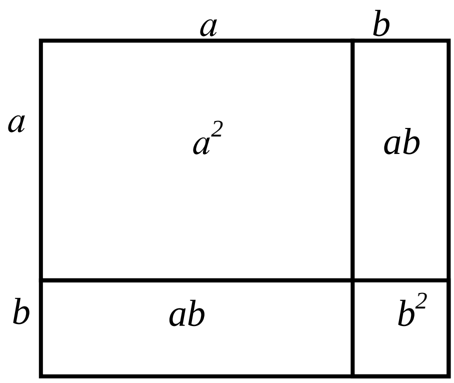
4) постійно перевіряти ще раз правильність висновків.

Звернемо увагу читача, що сформульовані Р. Декартом положення методу досягнення достовірного знання співзвучні з дидактичними принципами засновника сучасної педагогіки чеського педагога і письменника Я.А. Коменського (1592 – 1670 р.р.), які викладені ним у книзі «Велика дидактика». У цій книзі виділені: принцип наочності навчання, свідомість у навчанні, систематичності навчання, послідовності навчання і ґрунтовності вивчення навчального матеріалу. Цей факт свідчить про те, що навчання і придбання достовірних знань близькі поняття. Тому в процесі викладання і структуризації цього навчального матеріалу враховуватимемо як метод Р. Декарта, так і принципи дидактики Я.А. Коменського.

Повертаючись до оцінок внеску Р. Декарта в науку, і в математику зокрема, слід навести його думку про те, що є математика. Р. Декарт писав: «До галузі математики відносяться тільки ті науки, у яких розглядається або *порядок*, або *міра* і абсолютно не суттєво чи будуть це числа, фігури, зірки, звуки або будь-що інше, у чому відшукають цю міру. Таким чином, повинна існувати якась загальна наука, яка пояснює, що все стосується порядку і міри, не заглиблюючись у дослідження окремих предметів, і ця наука повинна називатися не іноземним, а старим, таким, що вже увійшло в обіг ім'ям Загальної математики». Звідси випливає, що основу методології геодезії як науки складає вища математика. Для розвитку геодезії Р. Декарт отримав найважливіші результати. Він розробив основи аналітичної геометрії, суть якої полягає у використанні алгебраїчних методів у геометрії і навпаки. Прикладом можуть служити перетворення показані на рис. 2.3, де наведений аналітичний запис (формула) і її геометрична інтерпретація. Р. Декарт показав, що усяка крива може бути виражена рівнянням двох змінних, і навпаки – усяке рівняння із двома змінними може бути виражено кривою. Це відкриття мало величезне значення не лише для математики, але і для інших наук, зокрема геодезії, що оперує точними величинами – числом, мірою і вагою.

Геометрична інтерпретація аналітичного співвідношення

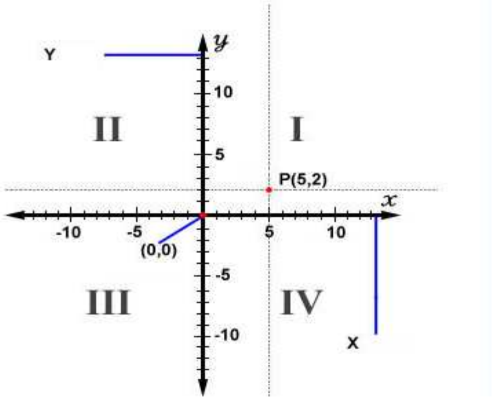
Аналітична інтерпретація геометричних побудов



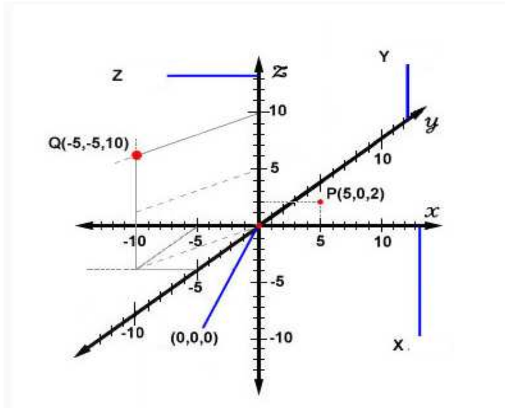
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

Рис. 2.3 – Геометричні побудови і їх інтерпретація на мові символів

Важливим поняттям в геодезії є «система координат». Р. Декарт запропонував двомірну (прямокутну) і трьохмірну системи координат з позначенням точок у цих системах. Їх ілюструє на рис. 2.4.



Точка P має координати (5,2)



Точка P має координати (5,0,2)
а точка Q — координати (-5,-5,10)

Рис. 2.4 – Декартові системи координат

Крім того, розглядаючи результати, які отримані Р.Декартом з погляду мовознавства (лінгвістики), можна стверджувати, що він запропонував математичну мову, вводячи відповідні позначення змінних, констант (коефіцієнтів), відношень, тобто лексику, а також синтаксис – правила запису математичних співвідношень, які збереглися і використовуються сучасними математиками. Як приклад наведемо формальний запис одного виразу французьким математиком Франсуа Вієтом (1540 – 1603 р.р.) і запис на математичній мові запропонованій Р.Декартом

$$\frac{D\ in\ [B\ cubum\ 2 - D\ cubo]}{B\ cubo + D\ cubo} \Leftrightarrow \frac{D(2B^3 - D^3)}{B^3 + D^3}.$$

Видно, що права частина співвідношення має сучасний вигляд.

Підсумовуючи сказане, очевидно, правильно говорити не про внесок Р.Декарта в геодезію, а про створення ним математичного інструментарію, який дозволяє описувати геодезичні об'єкти, визначати їх координати з високою мірою точності і достовірності.

Дослідження результатів і досягнень в епоху Відродження в галузі природничих наук (фізиці, механіці, астрономії і ін.) показують, що вони отримані завдяки розвитку математики. Вартий уваги той факт, що більшість видатних учених епохи Відродження були не лише фізиками, механіками, філософами, астрономами, але і математиками.

Християн Гюйгенс (1629 – 1695 р.р.) був не лише чудовим фізиком, механіком і астрономом, але і видатним математиком (див. рис. 2.5).

Він винайшов маятниковий годинник, удосконалив телескоп Г. Галілея. Його праці з теоретичної механіки мали величезний вплив на молодого Ньютона. У 1657 році Х. Гюйгенс написав додаток «Про розрахунки в азартній грі» до книги його вчителя Ван Схоутена «Математичні етюди». Багато дослідників історії математики вважають, що разом з Пьером Ферма і Блезом Паскалем, Християн Гюйгенс заклав основи теорії ймовірності, яку розвинув Якоб Бернуллі.

Блез Паскаль (фр. Blaise Pascal, 19 червня 1623 р. – 19 серпня 1662 р.) – французький математик, фізик, літератор і філософ. Класик французької літератури, один із засновників математичного аналізу, теорії ймовірності і проектної геометрії, творець перших зразків рахункової техніки, автор основного закону гідростатики.

Христіан Гюйгенс фон Цюйліхен (голл. Christiaan Huygens, 14 квітня 1629, Гаага — 8 липня 1695, там же) — голландський математик, фізик, астроном і винахідник.
Перші роботи Гюйгенса присвячені класичним проблемам: теоремам стосовно квадратури гіперболи, еліпса і круга, величини круга. Використовуючи підхід алгебри, він уточнив значення числа π. У 1657 написав трактат Про розрахунки при азартних іграх (De ratiociniis in ludo aleae) — одну з перших робіт по теорії ймовірності. Гюйгенс здобув популярність завдяки винаходу маятникового годинника. Про це відкриття він повідомив у творі «Годинник» (Horologium, 1658).

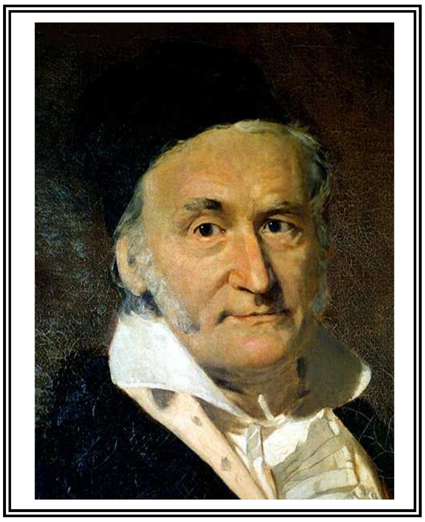
Рис. 2.5 – Один з основоположників теорії ймовірності

Ісаак Ньютон (англ. Sir Isaac Newton, 25 грудня 1642 – 20 березня 1727 за юліанським календарем, що використовувався в Англії у той час; або 4 січня 1643 – 31 березня 1727 за григоріанським календарем) — видатний англійський фізик, математик і астроном. Автор фундаментальної праці «Математичні основи натуральної філософії», і якій він описав закон усесвітнього тяжіння і так звані Закони Ньютона, що заклали основи класичної механіки. Розробив диференціальне і інтегральне числення, теорію кольоровості і багато інших математичних і фізичних теорій.

Не можна не відзначити внесок в науку, включаючи і прикладну, «короля математиків» Карла Фрідріха Гаусса, так його назвали радянські учені А.Н. Колмагоров і А.П. Юшкевіч у роботі «Математика XIX століття» [8]. Це один з небагатьох математиків, який безпосередньо займався геодезією (див.

рис. 2.6).

У період з 1820 по 1830 роки займається геодезичною зйомкою королівства Ганновера і складанням його детальної карти. Він не лише здійснює величезну організаційну роботу і керує вимірюванням довжини дуги меридіана від Геттінгена до Альтони, але і створює основи «вищої геодезії». За результатами практичних геодезичних робіт і теоретичних досліджень у цій галузі К. Гаусс пише роботу «Дослідження предметів вищої геодезії».



Гаусс Карл Фрідріх (30.04.1777, Брауншвейг, — 23.02.1855, Геттінген), німецький математик, що вніс фундаментальний внесок також в астрономію і геодезію. Народився в сім'ї водопровідника. З 1795 по 1798 вчився в Геттингенському університеті. У 1799 отримав доцентуру в Брауншвейзі, у 1807 очолив кафедру математики і астрономії в Геттингенському університеті, з якою була також пов'язана посада директора Геттингенської астрономічної обсерваторії. Відмітними рисами творчості Гаусса є глибокий органічний зв'язок у його дослідженнях між теоретичною і прикладною математикою, надзвичайна широта проблематики. Роботи Гаусса мали великий вплив на розвиток вищої алгебри, теорії чисел, диференціальної геометрії, теорії електрики і магнетизму, геодезії, цілих галузей теоретичної астрономії.

Рис. 2.6 – «Король математиків»

Вивчення форми земної поверхні вимагало від нього поглибленого вивчення загального геометричного методу для дослідження поверхонь. Висунуті К. Гауссом у цій галузі ідеї сформульовані в творі «Загальні дослідження кривих поверхонь» (1827). Основна думка цього твору полягає в тому, що при вивченні поверхні як нескінченно тонкої гнучкої плівки основне значення має не рівняння поверхні в декартових координатах, а диференціальна квадратична форма, через яку виражається квадрат елементу довжини, і інваріантами якої є всі власні властивості поверхні, – передусім її кривизна в кожній точці. Іншими словами, К. Гаусс запропонував розглядати ті властивості поверхні (так звані – внутрішні), які не залежать від згинів поверхні, що не змінюють довжин ліній на ній. Створена таким чином внутрішня геометрія поверхонь послужила зразком для створення n-мірної ріманової геометрії.

Величезне значення не лише для геодезії, але і для всіх наук, в основі яких лежить обробка спостережень, мають розроблені К. Гауссом методи набуття найбільш вірогідних значень вимірюваних величин. Особливо широку популярність здобув створений К. Гауссом в 1821 – 1823 р.р. метод найменших квадратів. К. Гауссом закладені також і основи теорії похибок.

Таким чином, розглянувши роль математики у формуванні природничо-наукових знань в епоху Відродження можна стверджувати, що отримані в цей період наукові результати в галузі математики лежать в основі сучасних методів обробки геодезичних вимірів і представлення їх в базах даних автоматизованих картографічних і геоінформаційних системах.

2.2. Фізичні величини

Під фізичною величиною розуміють властивість, притаманну в якісному відношенні багатьом фізичним об'єктам, але в кількісному відношенні індивідуальну для кожного об'єкту. У геодезії під фізичною величиною, що підлягає вимірюванню в процесі геодезичних робіт, розуміють, наприклад: горизонтальні напрями і кути, відстані, перевищення, площі, координати і таке інше.

Конкретний кількісний вміст у певному об'єкті властивості, відповідний поняттю «фізична величина», називають **розміром фізичної величини**. Оцінка розміру фізичної величини у вигляді певного числа прийнятих для неї одиниць називається **значенням фізичної величини.** Наприклад, значення перевищення між точками А і В дорівнює – 12,63 м.

Значення фізичної величини, яке ідеальним чином відбивало би відповідну властивість об'єкту, називається **істинним значенням фізичної величини**. Так, істинне значення суми кутів плоского трикутника дорівнює 180 градусів. Визначимо, що в більшості випадків практики істинне значення величини залишається невідомим. Значення фізичної величини, отримане експериментальним шляхом і яке настільки наближається до істинного значення, що в певному конкретному випадку практики може бути прийнято замість нього, називають **істинним приближеним значенням фізичної величини**.

В геодезії значення фізичної величини, яке за певних умов вимірів є *найбільш близьким за вірогідністю* до істинного значення, називають **найвірогіднішим значенням**.

2.3. Вимірювання і їх класифікація

Вимірюванням називають знаходження значення фізичної величини дослідним шляхом за допомогою спеціальних технічних засобів. Схематичний процес вимірів показаний на рис. 2.7. Тут показані основні елементи процесу геодезичних вимірів. В основі цього процесу лежить об'єкт геодезичного вимірювання, під яким розуміють предмети матеріального світу (місцевість, споруди, виробничі приміщення і таке інше), які характеризуються однією або декількома геодезичними величинами, що підлягають вимірюванням.

Спостерігач, виходячи з умов вимірів, обирає засоби і методи геодезичних вимірів для отримання необхідних результатів.

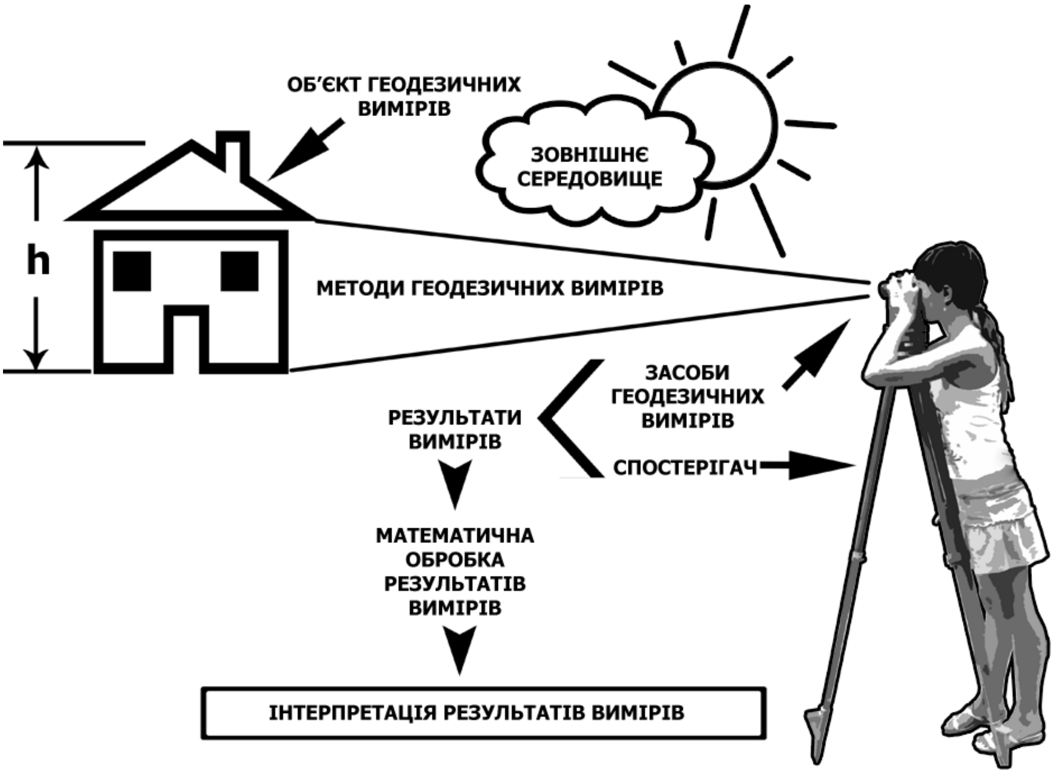


Рис. 2.7 – Узагальнена схема геодезичних вимірів

Умови проведення геодезичних вимірів визначають виходячи з безлічі чинників зовнішнього середовища, вимірів, що впливають на процес. До них належать кліматичні, механічні, електромагнітні, світлові, шумові та ін., що виявляються під час проведення геодезичних вимірів. Крім того, важливим чинником, що має вплив на вимірювання, є психофізіологічний стан спостерігача і його професійний досвід.

Умови геодезичних вимірів прийнято вважати за однакові, якщо:

- вимірювалися фізичні об'єкти одного і того ж роду;
- вимірювання здійснювалися виконавцями однакової кваліфікації;
- вимірювання проводилися однаковими за якістю приладами;
- застосовувався один і той же метод вимірів;
- стан зовнішнього середовища у процесі вимірів змінювався в однакових межах.

Якщо вимірювання виконані за однакових умов, їх результати вважають *рівноточними*. Недотримання хоч би однієї з перерахованих вище умов робить результати *нерівноточними*.

Вибір засобів геодезичних вимірів і вивчення їх технічних характеристик є предметом вивчення геодезії, тому коротко нагадаємо, що в засобах геодезичних вимірів (геодезичних приладах) реалізуються різні фізичні явища: оптичний, оптико-механічний, оптико-електронний, електромагнітний, імпульсний, фазовий, супутниковий, доплеровський, інтерференційний та ін.

Детальніше розглянемо різні методи геодезичних вимірів, під якими розуміють сукупність операцій (правил, прийомів) з виконання геодезичних вимірів відповідно до принципу вимірів, виконання яких забезпечує отримання результатів із заданою точністю,яка реалізовується. У геодезії розрізняють наступні методи вимірів:

- метод прямих геодезичних вимірів, за якого значення вимірюваної геодезичної величини отримують безпосередньо;
- метод непрямих геодезичних вимірів, за якого значення геодезичної величини визначають як функцію інших величин, отриманих безпосередньо;
- метод вимірів у всіх комбінаціях (комбінований метод) полягає в отриманні не лише геодезичних величин, розташованих між суміжними пунктами, але і їх різних поєднань (комбінацій);
- метод прийомів, полягає в неодноразових визначеннях однієї і тієї ж геодезичної величини за єдиною методикою.
- метод кругових прийомів полягає у вимірюванні кутів шляхом послідовного спостерігання візирних цілей, розташованих по колу з повторним спостеріганням першого (початкового) напряму;
- метод подвійних вимірів, полягає у виконанні однорідних геодезичних вимірів серіями, що складаються з двох прийомів (спостережень);
- метод повторень (метод реітерацій) полягає у визначенні n-кратного значення вимірюваної геодезичної величини і наступному обчисленні визначеного значення;
- метод вимірів "вперед" полягає в спостеріганні за точкою передньою за ходом;
- метод вимірів "з середини" полягає в послідовному спостеріганні суміжних пунктів (точок) ходу, що прокладається, за допомогою приладу, розташованого між ними;
- метод вимірів "через точку" виконується при встановленні приладу або на парних, або на непарних пунктах ходу;
- багатоштативний метод вимірів, полягає в зниженні похибок центрування шляхом встановлення одночасно на декількох суміжних пунктах мережі

штативів із підставками для розміщення в них візирних цілей або приладу. Найбільшого поширення на практиці набув трьохштативний метод вимірів.

Вимірювання також класифікуються за необхідними і додатковими або надмірними. Їх називають необхідними, якщо вони дають *тільки один результат* прямого вимірювання, непрямого вимірювання або *тільки одне значення* функції вимірюваних величин.

Прикладами необхідних вимірів є: одноразове вимірювання довжини лінії мірною стрічкою або далекоміром, вимірювання горизонтального кута теодолітом одним напівприйомом, визначення тахеометром перевищення із станції на рейковий пікет, визначення координат точки засічкою за двома вимірюваними кутами, n-1 вимірюємих ліній і кутів у теодолітному ході з n-точок.

Необхідні вимірювання неможливо проконтролювати, тому немає можливості оцінити їх якість.

Усі вимірювання, виконані понад необхідні, які дозволяють отримати два і більше значень вимірюваної величини або два і більше значень функції, називають надлишковими.

Надлишкові вимірювання дають можливість:

- здійснити контроль вимірів;
- оцінити точність виконаних вимірів;
- набути таких наближених значень вимірюваних величин, які в загальному випадку опиняються ближчими до дійсного значення, ніж окремо отриманий результат необхідного вимірювання.

На процес вимірювання переважно, впливають наступні чинники, що взаємодіють між собою (див. рис.2.7):

- специфіка об'єкта вимірювання;
- психофізіологічний стан і кваліфікація суб'єкта вимірювання, тобто виконавця;
- особливості мірного приладу, за допомогою якого виконавець здійснює вимірювання;
- особливості методу вимірювання, що визначає вимірювальний процес;
- специфіка зовнішнього середовища, у якому перебігає процес вимірювання.

Значення фізичної величини, знайденої шляхом її вимірювання, називають **результатом вимірювання**. Результат вимірювання у загальному вигляді можна представити формулою

$$l = n \cdot l_0, \tag{2.1}$$

де l – результат вимірювання; l_0 – значення одиниці вимірювання, n – кількість одиниць вимірювання.

За фізичним виконанням розрізняють прямі або безпосередні вимірювання, коли шукана величина безпосередньо порівнюється з одиницею вимірювання, і непрямі, коли значення вимірюваної величини є функцією одного або декількох аргументів виміряних безпосередньо або опосередковано.

За приклади безпосередніх вимірів можна вважати вимір температури термометром, вимір маси тіла на рівноплечних вагах шляхом порівняння її із масою гирь, вимір довжини лінії мірною стрічкою.

За приклад непрямих вимірів можна вважати вимір довжини лінії нитяним далекоміром і обчислення її за формулою

$$D = kl + C, \tag{2.2}$$

де довжина лінії *D* визначається як функція безпосередньо виміряного відрізка рейки *l*, який розташований між далекомірними штрихами, і параметрів далекоміра – коефіцієнта *k*; постійного доданку *C*.

За інший приклад непрямих вимірів можна вважати вимір перевищення при тригонометричному нівелюванні за формулою

$$h = {}^{1}\!/_{2}\, D sin2v + I - V, \tag{2.3}$$

де перевищення h визначається як функція опосередковано виміряних далекомірних відстаней *D*, кута нахилу *υ* і безпосередньо виміряних висоти приладу *I* і точки візування *V*.

Завершальною процедурою в процесі геодезичних вимірів є **математична обробка** отриманих результатів. Ця процедура отримання результатів геодезичних вимірів і оцінки їх точності шляхом проведення обчислювальних операцій із виміряними значеннями геодезичних величин за певним алгоритмом. В основі математичної обробки геодезичних вимірів лежать математичні методи і моделі теорії ймовірності, математичної статистики і теорії похибок.

У процесі математичної обробки результатів вимірів можна виділити наступні етапи:

- систематизація і класифікація результатів вимірів;
- виявлення характеру похибок вимірів (випадкові або систематичні);
- обчислення числових значень похибок вимірів;
- обчислення поправок і вагів функцій результатів вимірів;
- оцінка точності результатів вимірів;
- оцінка надійності результатів вимірів;
- оцінка прецизійності результатів вимірів.

Таким чином, розглянуті основні елементи і дані загальних характеристик процесу вимірювання. Наведені методи вимірів, їх класифікація. Виділені основні етапи математичної обробки результатів геодезичних вимірів.

2.4. Похибки вимірів і їх класифікація

Похибку вимірів визначають як оцінку відхилення величини виміряного значення від її дійсного значення. Похибка вимірювання є характеристикою (мірою) точності вимірювання.

Залежно від характеру вимірюваної величини для визначення похибки вимірів використовують різні методи.

Метод Корфельда полягає у виборі надійного інтервалу в межах від мінімального до максимального результату вимірів, і похибка Δx як половина різниці між максимальним (X_{max}) і мінімальним (X_{min}) результатом вимірювання

$$\Delta X = \frac{X_{max} - X_{min}}{2}. \quad (2.4)$$

Середня квадратична похибка обчислюється за формулою

$$S = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - x)^2}{n-1}}. \quad (2.5)$$

Середня квадратична похибка середнього арифметичного обчислюється за формулою

$$S_x = \frac{S}{\sqrt{n}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - x)^2}{n(n-1)}}. \quad (2.6)$$

У теорії похибок виділяють наступні класи похибок: за формою представлення похибки, внаслідок їх виникнення і за характером прояву.

За формою представлення похибок розрізняють наступні похибки.

Абсолютна похибка – ΔX є оцінкою абсолютної помилки вимірювання. Величина цієї похибки залежить від способу її обчислення, який, у свою чергу, визначається розподілом випадкової величини X_{meas}. При цьому рівність $\Delta X=|X_{true} - X_{meas}|$, де X_{true} – дійсне значення, а X_{meas} – виміряне значення, повинно виконуватися з деякою ймовірністю близькою до 1. Якщо випадкова величина X_{meas} розподілена за нормальним законом, то за абсолютну похибку приймають середньоквадратичне відхилення. Абсолютна похибка вимірюється в тих же одиницях вимірювання, що й сама величина.

Відносна похибка – відношення абсолютної похибки до того значення, яке приймається за дійсне значення і обчислюється за формулою

$$\delta = \frac{\Delta x}{X}. \tag{2.7}$$

Відносна похибка є безрозмірною величиною або вимірюється у відсотках.

Приведена похибка – відносна похибка, виражена відношенням абсолютної похибки засобу вимірів до умовно набутого значення величини, постійного в усьому діапазоні вимірів або частині діапазону. Вона обчислюється за формулою

$$\delta_x = \frac{\Delta x}{X_n}, \tag{2.8}$$

де X_n – нормоване значення, яке залежить від типу шкали вимірювального приладу і визначається за його градуюванням:

- якщо шкала приладу одностороння, тобто нижня межа вимірів дорівнює нулю, то X_n визначається рівним верхньої межі вимірів;

- якщо шкала приладу двостороння, то нормуюче значення дорівнює ширині діапазону вимірів приладу.

Приведена похибка є безрозмірною величиною і може вимірюватися у відсотках.

За походженням розрізняють наступні похибки:

Інструментальні (приладові похибки) – ті, які визначають похибки вживаних засобів вимірів і викликаються недосконалістю принципу дії, неточністю градуювання шкали і її ергономічністю.

Методичні похибки – ті, які зумовлені недосконалістю методу, а також спрощеннями, покладеними в основу методики вимірів.

Суб'єктивні (операторні) похибки – ті, які зумовлені ступенем уважності, зосередженості, підготовленості й іншими психофізіологічними якостями людини, яка здійснює вимірювання.

Крім того, за походженням похибок виділяють похибки залежні від специфіки об’єкту вимірювання та зовнішнього середовища.

У процесі вимірів застосовують прилади для вимірювання лише з визначеною заздалегідь заданою точністю – основною похибкою, нормалі, що припускається, за нормальних умов експлуатації для певного приладу. Якщо вимірювальний прилад використовують в умовах відмінних від нормальних умов, то виникає додаткова похибка, що збільшує загальну похибку приладу. До додаткових похибок відносять: температурну, викликану відхиленням температури навколишнього середовища від нормальної, встановчу, зумовлену відхиленням положення приладу від нормального робочого положення і так далі. За нормальну температуру навколишнього повітря приймають 20°С, за нормальний атмосферний тиск 101,325 кПа. Узагальненою характеристикою засобів вимірювання є клас точності, визначений граничними значеннями припустимих основної і додаткової похибок. Клас точності засобів вимірювання характеризує їх точностні властивості, але не є безпосереднім показником точності вимірів, що виконуються за допомогою цих засобів, тому що точність залежить також від методу вимірів і умов їх виконання.

За характером прояву розрізняють наступні похибки.

Грубі похибки або промахи, які різко відхиляють результати вимірів від дійсного значення. Вони завжди виникають тільки з вини виконавця (оператора). У теорії похибок грубі похибки не вивчають. Їх необхідно своєчасно виявляти, а результати вимірів, що містять ці похибки, виключати з подальшої обробки. Найбільш дієвими методами виявлення грубих похибок є виконання надмірних вимірів. От чому в геодезії кожну величину вимірюють, переважно не менше двох разів.

Систематичні елементарні похибки породжуються істотними зв'язками між чинниками, що впливають на вимірювання, і виникають кожного разу за одних і тих же умов. Систематичні похибки підпорядковані певній закономірності. Ці закономірності піддаються вивченню і за певних умов систематичні похибки можуть бути виключені з окремого результату вимірів.

Випадкові елементарні похибки породжуються не істотними, а другорядними випадковими зв'язками між чинниками вимірів, за певних умов вимірів. Вони можуть з'являтися в процесі вимірів, а можуть і не з'явитися, можуть бути великими або малими, позитивними або негативними. Величина і знак цих похибок має випадковий характер, а їх розподіл підпорядкований законам теорії ймовірності. Випадкові похибки не можуть бути виключені з окремого результату вимірювання. Їх вплив на результати вимірів можна лише послабити, підвищуючи кваліфікацію виконавця, вдосконалюючи вимірювальні прилади і методику вимірів, виконуючи вимірювання за сприятливіших умов. Вплив випадкових похибок можна також послабити належною математичною обробкою результатів вимірів. Сумарний вплив елементарних систематичних похибок утворює систематичну похибку θ результату вимірювання, а сумарний вплив елементарних випадкових похибок – випадкову похибку Δ результату вимірів.

Таким чином, похибка вимірювання ε можна представити як суму двох складових

$$\varepsilon = \theta + \Delta. \tag{2.9}$$

На практиці при здійсненні геодезичних вимірів систематичні і випадкові похибки виникають спільно, тому їх поділ у процесі обробки результатів вимірів є надзвичайно важким. Більше того, в деяких випадках похибки, випадкові за походженням, за певних умов стають систематичними.

Приклад 2.1. Похибки вимірювання висот точок знімальної мережі, отриманих з геометричного або тригонометричного нівелювання, за своєю природою є випадковими. Проте при тахеометричній або мензульній зйомці у конкретній ситуації дана похибка постійна за величиною і знаком, а тому увійде до висот рейкових пікетів як систематична.

2.5. Властивості випадкових похибок

Розглядаючи властивості випадкових похибок, матимемо на увазі не їх індивідуальні властивості, а найбільш загальні інтегральні властивості, які мають достатньо великі сукупності цих похибок.

У теорії похибок виділяють чотири такі властивості.

Властивість обмеженості. За певних умов вимірів випадкова похибка за абсолютною величиною не може перевищити певну відому межу. Ця межа називається граничною похибкою. Позначивши її $\Delta_{гр}$, цю властивість можна виразити нерівністю

$$|\Delta| \leq \Delta_{гр}. \tag{2.10}$$

Властивість компенсації. Якщо ряд вимірів однієї або декількох величин здійснюється в одних і тих же умовах, то сума випадкових похибок, що ділиться на їх кількість, при необмеженому збільшенні ряду вимірів в границі наближається до нуля, тобто

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[\Delta]}{n} = 0. \tag{2.11}$$

У виразі (2.11) і надалі використовуватимемо символіку К.Ф. Гаусса, де квадратні дужки означають суму однорідних величин. Наприклад,

$$\begin{aligned}
&[\Delta] = \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_n;\\
&[\Delta^2] = [\Delta\Delta] = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_n^2;\\
&[aa] = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2;\\
&[ab] = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Властивість незалежності. Якщо здійснюється два ряди вимірів з випадковими похибками: 1) $\Delta'_1, \Delta'_2, \ldots, \Delta'_n$ і 2) $\Delta''_1, \Delta''_2, \ldots, \Delta''_n$, то сума попарних добутків цих похибок, що ділиться на кількість цих добутків, при необмеженому зростанні кількості вимірів в границі наближається до нуля.

Використовуючи символіку К.Ф. Гаусса, цю властивість можна записати формулою

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[\Delta'\Delta'']}{n} = 0. \qquad (2.13)$$

Ця властивість не є всеохоплюючою. У геодезичній практиці зустрічаються не часто, але зустрічаються залежні випадкові похибки.

Властивість розсіювання. Якщо ряд вимірів здійснюється за одних і тих же умов, то для випадкових похибок має місце межа

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[\Delta^2]}{n} = \sigma^2. \qquad (2.14)$$

Величина σ називається стандартом. Квадрат стандарту σ^2 називають дисперсією, а величину

$$P = \frac{c}{\sigma^2}\ , \qquad (2.15)$$

де c – довільне позитивне число називають **вагою**.

Із співвідношень (2.14) і (2.15) виходить: ряди вимірів, виконані з більшою точністю, мають менший стандарт та дисперсію і більшу вагу.

Додаткові джерела інформації

1. Википедия [электронный ресурс] / Метрология #. Режим доступа. - http://ru. wikipedia. org/ wiki/ Заголовок с экрана 11.12.09.
2. Галилей [электронный ресурс] / Г. Галилей. - Режим доступа. - http://ru. wikipedia.org/wiki/ Заголовок с экрана 01.08.09.
3. Рене Декарт. Рассуждение о методе, чтобы верно направлять свой разум и отыскивать истину в науках [электронный ресурс] / Рене Декарт.- Режим доступа. - http://psylib.org.ua/books/dekar01/ Заголовок с экрана 21.09.09.
4. Математика [электронный ресурс] / Сайт Комітету питань науки і освіти. - Режим доступу. - http://ru.wikipedia.org/wiki/ Заголовок с экрана 29.09.09.
5. Гюйгенс, Христиан. Энциклопедия «Кругосвет» [электронный ресурс] / Гюйгенс, Христиан. - Режим доступа. - http://slovari.yandex.ru/dict/ krugosvet/article/3/35/1003945.htm. Заголовок с экрана 17.08.09.
6. Паскаль, Блез [электронный ресурс] / Блез Паскаль. - Режим доступа. - http://ru.wikipedia.org/wiki/ Заголовок с экрана 17.08.09.
7. Ньютон, Исаак [электронный ресурс] / Исаак Ньютон. - Режим доступа. - http://ru.wikipedia.org/wiki/ Заголовок с экрана 09.07.09.
8. Колмогоров, А.Н. Математика XIX века [Текст] / А.Н. Колмогоров, А.П. Юшкевич. - М.: Наука, 1980. – 128 с.

9. Гаусс. Словари и энциклопедии [электронный ресурс] / К.Ф. Гаусс. - Режим доступа. - http://dic.academic.ru/dic.nsf/bse / Заголовок с экрана 19.09.09.
10. Гаусс, Карл Фридрих. Википедия [электронный ресурс] / К.Ф. Гаусс. - Режим доступа. - http://ru.wikipedia.org/wiki / Заголовок с экрана -6.06.09.
11. Войславский, Л.К. Теория математической обработки геодезических измерений. Часть 1. Теория погрешностей измерений [Текст] учебно-методическое пособие (для студентов 2 курса дневной формы обучения спец. 7.070908 «Геоинформационные системы и технологии») / Л.К. Войславский. – Х.: ХНАГХ, 2006. – 64 с.
12. Погрешность измерения [электронный ресурс] / Сайт Комітету питань науки і освіти. - Режим доступу. - http://ru.wikipedia.org/wiki/ Заголовок с экрана - 5.11.09.
13. Кемниц, Ю.В. Теория ошибок измерений [Текст] / Ю.В.Кемниц. – М.: Недра, 1962. – 175 с.

3. КІЛЬКІСНІ КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ТОЧНОСТІ ВИМІРІВ

3.1. Моделі розподілу випадкових похибок вимірів

Вище було показано, що випадкова похибка є наслідком впливу на результат вимірів різних випадкових взаємопов'язаних чинників. Її можна інтерпретувати як алгебраїчну суму безлічі елементарних випадкових похибок.

Проаналізуємо процес формування випадкових похибок на прикладі вимірювання перевищення при геометричному нівелюванні. Для цього розглянемо випадкові похибки округлення відліку, узятого по рейці із точністю до 1 мм. Задамо інтервал вимірів, і вважатимемо, що вимірювання виконують в інтервалі від -0,5 до +0,5 (рис.3.1).

Усі можливі значення похибок округлення $\Delta(u)$ укладаються в десять фіксованих рівно імовірних інтервалів:

1) [- 0,5 – - 0,4]; 2) [- 0,4 – - 0,3]; 3) [- 0,3 – - 0,2]; 4) [- 0,2 – - 0,1];
5) [- 0,1 – 0]; 6) [0 – 0,1]; 7) [0,1 – 0,2]; 8) [0,2 – 0,3]; 9) [0,3 – 0,4];
10) [0,4 – 0,5].

Тут квадратними дужками позначені інтервали округлення на осі $\Delta(u)$. Ймовірність потрапляння похибок округлення у будь-який з інтервалів, представлених на рис. 3.1, дорівнює 0,1.

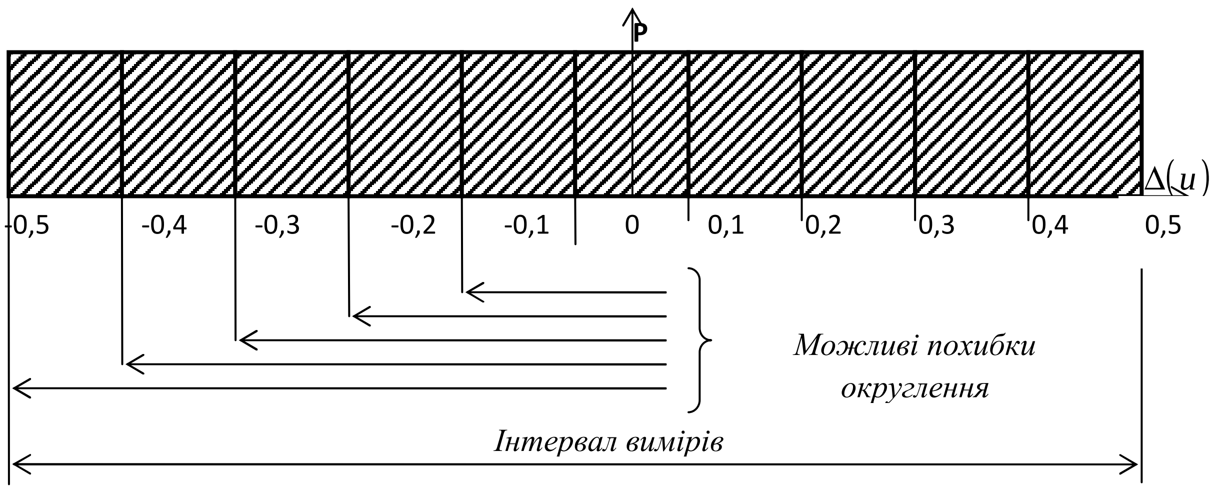


Рис. 3.1 – Рівномірний розподіл помилок вимірів

Процес округлення вимірів має дискретний характер і тому при оцінюванні точності вимірів у певному випадку можна скористатися відомими з теорії ймовірності властивостями закону рівномірного розподілу випадкових величин (вимірів): функцією ймовірності, функцією розподілу, математичним очікуванням, медіаною та ін.

Відзначимо, що так само будуть розподілені елементарні похибки округлення відліків по горизонтальному і вертикальному кругу теодоліта, відліків по рейці при визначенні відстаней нитковим далекоміром, відліків рахункового механізму планіметра і в інших випадках геодезичної практики.

Відомо, що перевищення дорівнює різниці відліків $h = u_з - u_п$. Усі можливі значення похибок округлення $\Delta(h)$ обчисленого перевищення наведені в табл. 3.1.

Таблиця 3.1 – Значення можливих похибок округлення

Δ(h)	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0	+0,1	+0,2	+0,3	+0,4	+0,5
-0,5	0	-0,1	-0,2	-0,3	-0,4	-0,5	-0,6	-0,7	-0,8	-0,9	-1,0
-0,4	+0,1	0	-0,1	-0,2	-0,3	-0,4	-0,5	-0,6	-0,7	-0,8	-0,9
-0,3	+0,2	+0,1	0	-0,1	-0,2	-0,3	-0,4	-0,5	-0,6	-0,7	-0,8
-0,2	+0,3	+0,2	+0,1	0	-0,1	-0,2	-0,3	-0,4	-0,5	-0,6	-0,7
-0,1	+0,4	+0,3	+0,2	+0,1	0	-0,1	-0,2	-0,3	-0,4	-0,5	-0,6
0	+0,5	+0,4	+0,3	+0,2	+0,1	0	-0,1	-0,2	-0,3	-0,4	-0,5
+0,1	+0,6	+0,5	+0,4	+0,3	+0,2	+0,1	0	-0,1	-0,2	-0,3	-0,4
+0,2	+0,7	+0,6	+0,5	+0,4	+0,3	+0,2	+0,1	0	-0,1	-0,2	-0,3
+0,3	+0,8	+0,7	+0,6	+0,5	+0,4	+0,3	+0,2	+0,1	0	-0,1	-0,2
+0,4	+0,9	+0,8	+0,7	+0,6	+0,5	+0,4	+0,3	+0,2	+0,1	0	-0,1
+0,5	+1,0	+0,9	+0,8	+0,7	+0,6	+0,5	+0,4	+0,3	+0,2	+0,1	0

Усього можливе 121 значення похибок округлення в межах усього інтервалу вимірів [-0,5 – +0,5], які можна об'єднати в 21 групу рівних значень, враховуючи, що ймовірність округлення вимірів в межах одного інтервалу, наприклад [-0,5 – -0,4] або [+0,5 – +0,4] або [+0,1 – +0,2] вища, ніж ймовірність округлення в інтервалах [-0,5 – -0,3] або [-0,5 – -0,2] або [+0,1 – +0,5] і таке інше. Ймовірність таких округлень розподілена за законом Сімпсона, «трикутник розподілу». Аналітичний вираз трикутного розподілу Сімпсона, характеристична функція і його властивості наведені в додатку **Б**.

Для наведеного вище прикладу випадкових похибок округлення розподіл Сімпсона показаний на рис. 3.2.

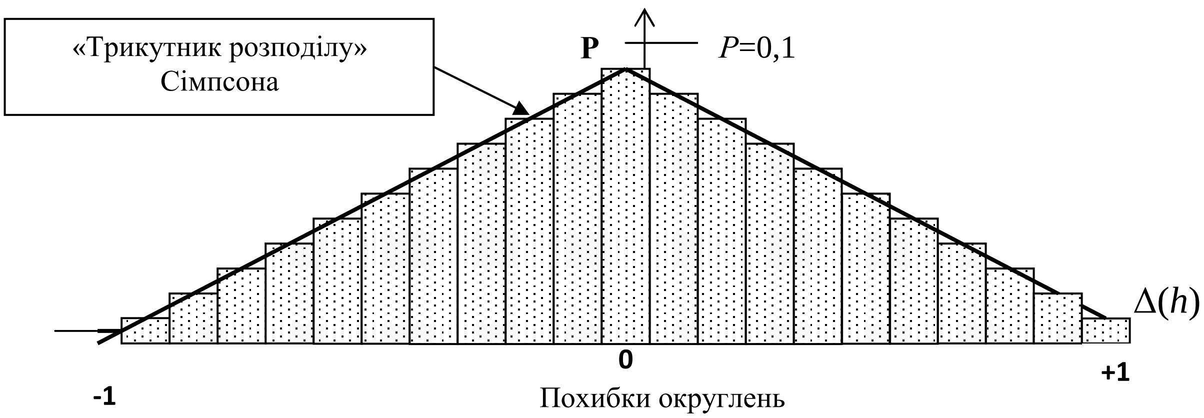


Рис. 3.2 – Ілюстрація розподілу похибки округлень на інтервалі вимірів [-0,5 – +0,5]

Як приклад наведемо табл. 3.2, де в чисельному вигляді представлені співвідношення похибок округлення і ймовірність їх появи.

У геометричному нівелюванні перевищення на станції вимірюють двічі, за основною (чорною) і додатковою (червоною) сторонами рейки. За остаточний результат виміряного перевищення вважають середнє значення. Для середнього перевищення h можливо $N=121^2=14641$ варіантів випадкової елементарної похибки округлення. Усю множину значень можна об'єднати в 21 інтервал групування, як це показано в правій частині табл. 3.2. За даними цієї таблиці побудуємо криву розподілу випадкових похибок вимірів (рис. 3.3.), що виражає деяку функцію $f(\Delta)$.

Таблиця 3.2 – Приклад числових співвідношень ймовірності і величин похибки округлення

Значення середини інтервалу	**Діапазон значень в інтервалі**	**Обчислене перевищення на станції**		**Середнє перевищення на станції**	
		Кількість випадків *h*	**Вірогідність**	**Кількість випадків *h***	**Вірогідність**
1	2	3	4	5	6
- 1,0	-1,05 – -0,95	1	0,0083	3	0,002
- 0,9	-0,95 – -0,85	2	0,0165	22	0,0015
- 0,8	-0,85 – -0,75	3	0,0248	73	0,0050
- 0,7	-0,75 – -0,65	4	0,0331	172	0,0117
- 0,6	-0,65 – -0,55	5	0,0413	335	0,0229
- 0,5	-0,55 – -0,45	6	0,0496	576	0,0393
- 0,4	-0,45 – -0,35	7	0,0579	879	0,0600
- 0,3	-0,35 – -0,25	8	0,0661	1198	0,0818
- 0,2	-0,25 – -0,15	9	0,0744	1485	0,1014
- 0,1	-0,15 – -0,05	10	0,0826	1612	0,1156
0	-0,05 – +0,05	11	0,0909	1771	0,1210
+ 0,1	+0,05 – +0,15	10	0,0826	1692	0,1156
+ 0,2	+0,15 – +0,25	9	0,0744	1485	0,1014
+ 0,3	+0,25 – +0,35	8	0,0661	1198	0,0818
+ 0,4	+0,35 – +0,45	7	0,0579	879	0,0600
+ 0,5	+0,45 – +0,55	6	0,0496	576	0,0393
+ 0,6	+0,45 – +0,55	5	0,0413	335	0,0229
+ 0,7	+0,55 – +0,65	4	0,0331	172	0,0117
+ 0,8	+0,75 – +0,85	3	0,0248	73	0,0050
+ 0,9	+0,85 – +0,95	2	0,0165	22	0,0015
+ 1,0	+0,95 – +1,05	1	0,0083	3	0,0002
		121	1,0001	14641	0,9998

Відзначимо очевидні властивості цієї функції:

1. Функція завжди позитивна і симетрична щодо|відносно| осі ординат.
2. Функція має максимум у точці $\Delta = 0$, де похідна функції $f'(\Delta) = 0$.
3. Зі збільшенням абсолютної величини Δ функція $f(\Delta)$ асимптотично наближається до осі Δ.

4. Позитивним значенням Δ відповідають негативні значення $f'(\Delta)$, а негативним – позитивні значення $f'(\Delta)$, тобто має місце нерівність $f'(\Delta)\cdot\Delta < 0$.
5. Представлені в правій частині табл. 3.2 ймовірності вичерпують усі можливі значення $f(\Delta)$. Отже, площа фігури, обмежена віссю Δ і кривою має дорівнювати одиниці.

Перерахованим вище умовам відповідає функція, рівняння якої має вигляд:

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}}. \tag{3.1}$$

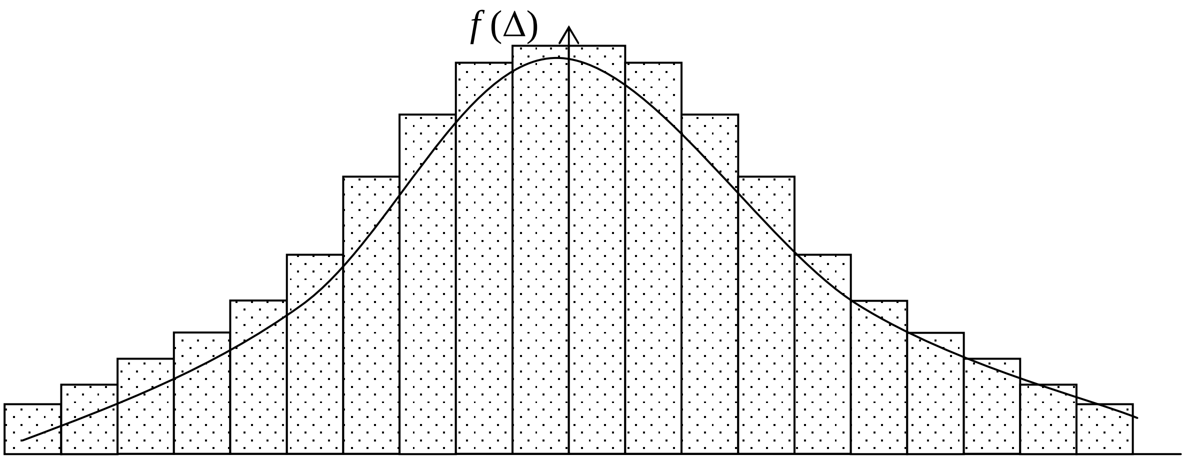


Рис. 3.3 – Нормальний закон розподілу

Параметр σ в (3.1) визначає стандарт, який був викладений у попередньому підрозділі. Чим менше σ, тим тісніше групуються значення Δ щодо осі $f(\Delta)$.

Розподіл випадкових похибок, представлений функцією (3.1), називають нормальним розподілом.

У розглянутому вище прикладі досліджувалося лише одне джерело формування випадкових похибок – похибок округлення відліку. Однак відомо, що на точність вимірювання перевищення методом геометричного нівелювання окрім похибок округлення впливають також похибки, зумовлені випадковими коливаннями візирної осі приладу, коливаннями зображення рейки внаслідок рефракції та інші чинники.

Аналогічне явище має місце і в інших видах геодезичних вимірів – горизонтальних і вертикальних кутів і напрямів, довжин ліній і так далі. Усе це дає підставу розглядати нормальний розподіл (3.1) як універсальний закон імовірнісного розподілу випадкових похибок.

3.2. Моделі розподілу систематичних похибок вимірів

Систематичні похибки, геодезичних вимірів, дуже різноманітні. Розподіл ряду систематичних похибок, викликаних тим або іншим джерелом, відбувається за своїм, властивим цьому джерелу похибок, закону. Розглянемо деякі з них:

1. *Характеристика постійних систематичних похибок*

У всіх результатах вимірів такі похибки мають однакову величину і знак. Класичний приклад такої похибки – відхилення стрілки від нульової відмітки перед зважуванням у вагів із стрілочною індикацією. У практиці геодезичних вимірів це похибки координат і висот опорних точок, похибка визначення місця нуля вертикального круга при тахометричній зйомці. Підвищуючи точність вимірів, при визначенні опорних точок і ретельніше визначаючи місце нуля, можна звести постійні систематичні похибки до величин якими нехтуємо порівняно з випадковими похибками. При точних кутових вимірюваннях визначають елементи відхилення приладу і візирних цілей від центрів знаків і впроваджують відповідні поправки (за центрування і редукцію) до результатів вимірів.

2. *Характеристика змінних систематичних похибок, залежних від величини вимірюваного об'єкту і зовнішніх умов вимірів*

Розглянемо приклади такого роду похибок (рис. 3.4). Якщо довжина стрічки або рулетки відхиляється від номінального значення на величину δ, то результат вимірювання лінії буде викривлений систематичною похибкою

$$\Theta_k = n\delta, \tag{3.2}$$

де n – кількість відкладень мірного приладу вздовж вимірюваної лінії.

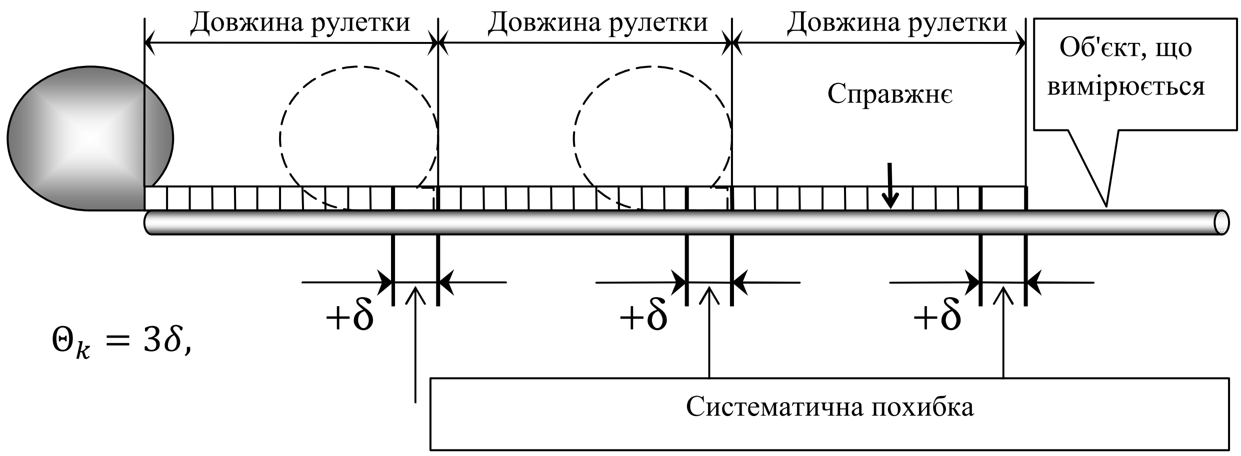


Рис. 3.4 – Ілюстрація систематичних похибок

Для усунення цієї похибки необхідно стрічку або рулетку перед початком роботи прокомпарувати, визначити величину δ і вводити до всіх результатів вимірів поправки, що обчислюються за формулою (3.2). Ця поправка має знак «+», якщо δ>0, і знак «-», якщо δ<0.

Інший приклад. Компарування стрічки або рулетки здійснюється за певної температури t_0. Реальні вимірювання здійснюють за температури t. Внаслідок цього виникає систематична похибка, зумовлена зміною довжини приладу

$$\Theta_t = \alpha \cdot (t_0 - t)D, \tag{3.3}$$

де α – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу, з якого виготовлений мірний прилад; D – довжина вимірюваної лінії.
Вимірявши температуру t, можна обчислити величину Θ_t і ввести до результату вимірювання відповідну поправку.

3. Характеристика періодичних систематичних похибок

Це інструментальні похибки, зумовлені ексцентриситетом алідади горизонтального або вертикального круга теодоліта. Вони мають періодичний характер з періодом, що дорівнює 360°. Рівняння компенсації цієї похибки має вигляд

$$\Theta_e = e \cdot \sin(u - u_e), \tag{3.4}$$

де e – лінійний елемент ексцентриситету; u_e – результат відліку за лімбом, який відповідає діаметру, що співпадає з елементом е; u – результат довільного відліку за лімбом.

Ексцентриситет алідади може бути визначений експериментально. За експериментальними даними обчислюється Θ_e за формулою (3.4) і у разі потреби у виміряні напрями вводяться відповідні поправки.

4. Характеристика однобічно діючих систематичних поправок

Такого роду похибки мають місце:

- внаслідок випадкових відхилень мірного приладу від створу лінії при вимірюванні довжин ліній мірною стрічкою або рулеткою;

- внаслідок випадкових відхилень рейки від вертикального положення при геометричному нівелюванні.

Якими би не були величини і знак цих відхилень, в тому й іншому випадках вони неминуче збільшують довжину вимірюваної лінії або результат відліку за рейкою. Визначити величину такого роду похибки неможливо. Для послаблення їх впливу застосовують більш точні методи укладання мірного приладу в створі лінії, в першому випадку, або використовують рейки, забезпечені круглим рівнем, – в другому.

3.3. Кількісні критерії оцінювання точності ряду рівноточних вимірів однієї величини

Завдання знаходження найбільш надійних значень вимірюваних величин призводить до розв'язання інших завдань, зокрема визначення точності результатів оцінювання вимірів. Очевидно, що на основі одного виміру оцінити точність отриманого результату є неможливим. Однак, якщо буде відома велика кількість результатів вимірів певної величини і дійсні похибки, то, проаналізувавши їх, можна уникнути грубих похибок, а в деяких випадках і систематичних похибок. Після цього можна отримати ряд випадкових дійсних похибок.

Розглядаючи декілька рядів випадкових дійсних похибок, можна оцінити точність результатів вимірів за ступенем їх розкиду, тобто чим менше вони відрізняються один від одного, тим вони точніше, і навпаки – тим менш точними слід їх вважати.

Для оцінки точності результатів вимірів прийняті наступні критерії: середня похибка, імовірнісна похибка і середня квадратична похибка.

Середньою похибкою θ називають середнє арифметичне абсолютних значень похибок $\Delta_i, i = \overline{1, n}$ результатів вимірів

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^{n}|\Delta_i|}{n} = \frac{[|\Delta|]}{n}. \quad (3.5)$$

Розглянемо довільний ряд випадкових похибок результатів вимірів деякої величини.

Абсолютним варіаційним рядом випадкових похибок називають послідовність цих похибок, розміщених в порядку зростання або убування за їх абсолютною величиною.

Ймовірнісною похибкою ρ називають таке значення абсолютного варіаційного ряду випадкових похибок, яке ділить даний ряд на дві рівні частини.

Розглянемо такий ряд випадкових похибок:

-0,01; 0,12; 0,56; -0,35; 0,06; -0,11; -0,05; -0,20; -0,08; 0,09; -0,19; -0,18; 0,32; -0,45; 0,30; -0,44; -0,57.

Побудуємо абсолютний варіаційний ряд або, іншими словами, ранжируємо ці величини без урахування їх знаків

0,01; 0,05; 0,06; 0,08; 0,09; 0,11; 0,12; 0,18; 0,19; 0,20; 0,30; 0,32; 0,35; 0,44; 0,45; 0,56; 0,57.

У середині цього ряду знаходиться значення 0,19. Отже ймовірнісна похибка вимірів ρ = 0,19.

У наведеному прикладі кількість значень N ряду похибок дорівнює непарному числу 17. Якщо кількість значень N ряду похибок дорівнює парному числу, то ймовірнісною похибкою буде середнє арифметичне двох значень абсолютного варіаційного ряду, які знаходяться у середині ряду.

Середньоквадратичною похибкою m називають величину, яка дорівнює квадратному кореню із середнього арифметичного квадратів дійсних похибок

$$m = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}. \tag{3.6}$$

Середньоквадратична похибка є найбільш прийнятним критерієм для оцінювання точності вимірів. Вона має наступні переваги порівняно із середньою і ймовірнісною похибками:

1. Середньоквадратична похибка є чутливою мірою точності тому, що на її величину сильно впливають великі за абсолютною величиною випадкові похибки, що визначають надійність результатів вимірів.

2. Середньоквадратична похибка вже за деякої відносно невеликої кількості вимірів набуває сталого значення і при збільшенні кількості вимірів змінюється незначно.

3. На основі середньоквадратичної похибки можна знайти граничну похибку (див. властивість обмеженості), тобто таке найбільше за абсолютною величиною значення випадкової похибки, яке може з'явиться за певних умов вимірів. Потрійна середньоквадратична похибка приймається за граничну, тобто

$$\Delta_{\text{гр}} = 3m. \tag{3.9}$$

4. Знаючи середньоквадратичні похибки певних величин, можна легко визначити середньоквадратичні похибки інших величин, функціонально пов'язаних з ними.

Гранична похибка $\Delta_{\text{гр}}$, як і стандарт σ, залежать тільки від умов вимірів. Отже, між цими величинами повинна існувати певна залежність.

У теорії ймовірності встановлено, що, якщо випадкові погрішності розподілені за нормальним законом, вираженим формулою (3.1), то ймовірності того, що $|\Delta| < 2\sigma = 0{,}9544$; $|\Delta| < 3\sigma = 0{,}9974$.

Це означає, що абсолютна величина випадкової похибки може бути більше 2σ лише в 5 випадках із 100 можливих, а більше 3σ тільки в 3 випадках з 1000 можливих.

Виходячи з цього і беручи до уваги те, що замість невідомого стандарту використовується середньоквадратична похибка, в геодезії прийнято як граничну похибку приймати величини

$$\Delta_{гр} = 2\sigma \approx 2m, \tag{3.10}$$

а при відносно невеликій кількості вимірюваних величин або при особливо відповідальних вимірюваннях

$$\Delta_{гр} = 3\sigma \approx 3m, \tag{3.11}$$

Отже, якщо будь-який результат вимірів має похибку більшу за граничну, то такий результат містить грубу похибку і тому має бути виключений з подальшої обробки і замінений новим, отриманим під час повторних вимірів.

В окремих випадках замість середньоквадратичної похибки використовують середню похибку, яка обчислюється за формулою

$$\upsilon = \frac{[|\Delta|]}{n}. \tag{3.12}$$

У теорії ймовірності доведено, що між величинами m і υ існують залежності

$$\upsilon = 0{,}7979m,\ m = 1{,}2533\upsilon. \tag{3.13}$$

Таким чином, усі точкові оцінки, так або інакше, пов'язані з середньоквадратичною похибкою. Зі свого боку, величина m є наближеним значенням стандарту.

Виникає питання, на скільки і як швидко значення m, яке залежить від кількості вимірів, наближається до σ? Досліджуємо це на окремому прикладі з практики геодезичних вимірів.

Приклад 3.1.

Вимірювалися горизонтальні кути теодолітом 2Т30М в умовах, які відповідають σ =30″. У табл. 3.3 наведені значення середньоквадратичної похибки m вимірів горизонтального кута, які проводилися серіями до k = 11. Перша серія складалася з 5 вимірів, друга – з 10, третя – з 15 вимірів і так далі. З кожною серією додавалося 5 вимірів, і 11 серія склала 55 вимірів.

Таблиця 3.3 – Початкові дані для оцінки залежності m від σ

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
n	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
m [*c*]	35	31	29	28	29	28	29	29	29	32	**30**

У табл. 3.3. позначене n – кількість вимірів в серії $k_i = \overline{1{,}11}$. З таблиці видно, що за n > 5 значення m достатньо швидко наближається до межі $\lim_{n\to\infty} m = \sigma$. У цьому випадку m залишається хоча і стійкою, проте, випадковою величиною, тобто містить деяку похибку. Тому необхідно оцінити точність і надійність величини m. Такою оцінкою може служити середня квадратична похибка m_m самої середньої квадратичної похибки m, яку обчислюють за наближеною формулою

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}} \, . \tag{3.14}$$

Підставляючи у формулу (3.14) значення m і n з табл. 3.3 отримаємо певну залежність (рис.3.5), яка характеризує швидкість наближення m до σ.

Таким чином, за малої кількості вимірів, що характерне у більшості випадків геодезичної практики, середня квадратична похибка має не більше однієї-двох значущих цифр.

Наведемо ще один приклад з оцінки точності рівноточних вимірів однієї величини.

Приклад 3.2.

Оцінимо точність кутових вимірів за нев'язкою трикутників, тобто за дійсну похибку для n=31 трикутника тріангуляції 1 класу, які наведені в табл. 3.4.

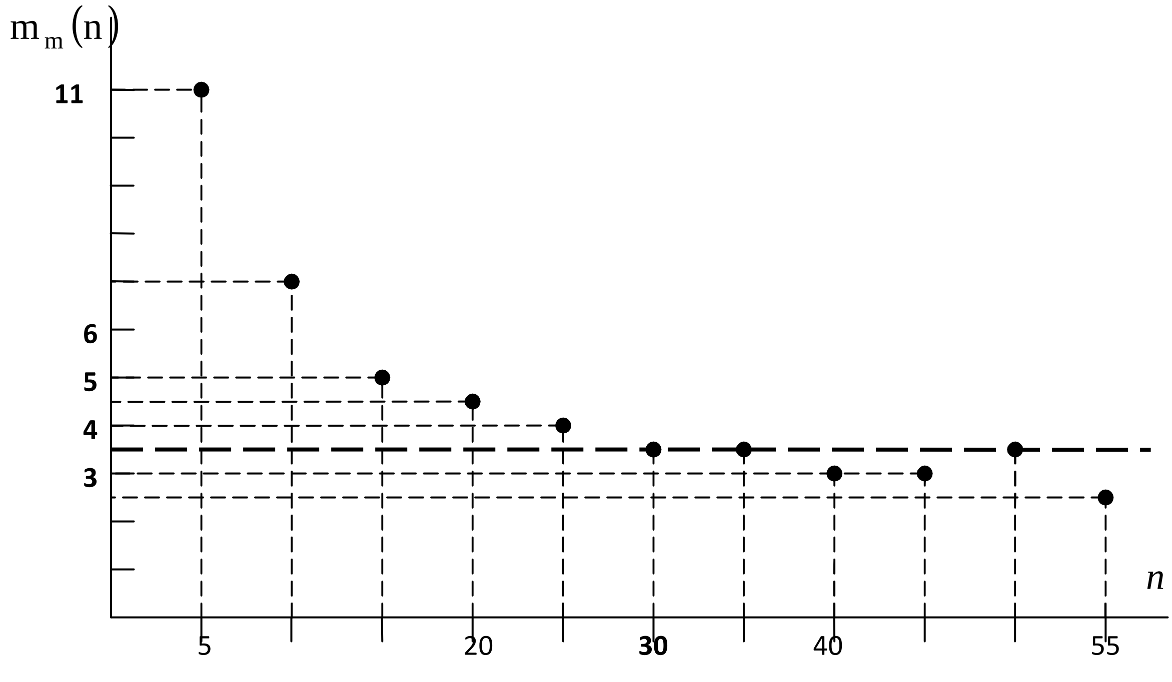


Рис. 3.5 – Ілюстрація залежності m_m від n

У графічному вигляді нев'язка вимірів, відповідна до значень табл. 3.4 ілюструється рис. 3.6, де в нижній частині рисунка показані абсолютні значення нев'язки (без урахування їх знаку).

Тут наочно представлений розподіл нев’язок за їх величинами, а також значення критеріїв оцінювання точності кутових вимірів за нев’язкою трикутників – середнє квадратичне значення m і значення середньої нев’язки υ.

Таблиця 3.4 – Вихідні дані для оцінювання точності кутових вимірів за нев’язкою трикутників

№ тр.	Незв’язність	№ тр.	Незв’язка	№ тр.	Незв’язка	№ тр.	Незв’язка
1	-0,34	9	-1,99	17	-0,67	25	+1,21
2	+0,74	10	+0,88	18	-0,20	26	-0,11
3	-0,29	11	-0,66	19	+1,00	27	+1,89
4	+0,69	12	-0,40	20	-1,46	28	-1,37
5	+0,90	13	+0,08	21	-0,35	29	+0,90
6	-1,99	14	+0,82	22	-1,44	30	+0,23
7	**+2,53**	15	-1,18	23	+1,76	31	-0,70
8	-1,97	16	+2,15	24	+0,47		

Для обчислення середньоквадратичного значення нев’язки скористаємося формулою (3.6). Підставимо до цієї формули значення нев’язки Δ.

$$m = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}34^2 + 0{,}74^2 + \cdots + 0{,}23^2 + 0{,}70^2}{31}} \approx 1{,}2''.$$

Середню нев’язку за формулою (3.12) або (3.13).

$$\upsilon = \frac{[|\Delta|]}{n} = \frac{31{,}37}{31} \approx 1{,}0'' \text{ або } \upsilon \;=\; 0{,}79 \cdot m \;=\; 0{,}95 \cdot 1{,}2 \;=\; 0{,}95''.$$

Оцінимо граничну незв’язку, подвоївши середньоквадратичні значення нев’язки

$$\Delta_{\text{гр}} = 2 \cdot m = 2{,}4''.$$

Враховуючи властивість обмеженості випадкових похибок і прийняті в геодезії правила оцінювання з використанням граничної похибки $\Delta_{\text{гр}}$ можна побачити (див. рис. 3.6), що всі значення нев'язки, за винятком однієї нев'язки Δ=2,53, менші $\Delta_{\text{гр}}$=2,4.

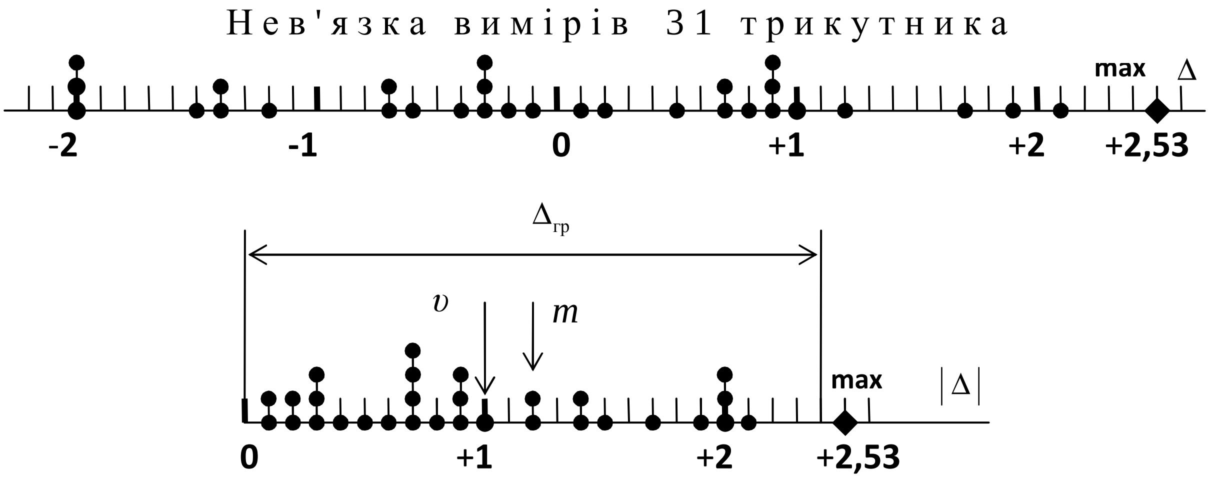


Рис. 3.6 – Графічна інтерпретація нев'язки вимірів

Крім того, властивість компенсації випадкових похибок дає можливість обчислити середнє значення нев'язки з урахуванням їх знаків

$$\frac{[\Delta]}{n} = \frac{(-0{,}34) + 0{,}74 + (-0{,}29) + \cdots + 0{,}23 + (0{,}70)}{31} = 0{,}036''.$$

Ці два факти дають підстави вважати, що кутові вимірювання, нев'язка яких представлена в табл. 3.4 виконані з високою точністю.

Додаткові джерела інформації

1. Петров, Н.С. Основы теории ошибок измерений [Текст] учебное пособие / Н.С.Петров. – М.: Литература по горному делу. 1963. – 73 с.
2. Войславский, Л.К. Теория математической обработки геодезических измерений. Часть 1. Теория погрешностей измерений [Текст] учебно-методическое пособие (для студентов 2 курса дневной формы обучения спец. 7.070908 «Геоинформационные системы и технологии») / Л.К. Войславский. – Х.: ХНАГХ, 2006. – 64 с.
3. Зазуляк, П.М. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірів [Текст] навчальний посібник / П.М. Зазуляк, В.І. Гавриш, Е.М. Євсєєва, М.Д.Йосипчук. – Львів: Видавництво «Растр-7», 2007. – 408 с.
4. Кемниц, Ю.В. Теория ошибок измерений [Текст] / Ю.В.Кемниц. – М.: Недра, 1962. – 175 с.

4. ОЦІНКА ТОЧНОСТІ ФУНКЦІЙ БЕЗПОСЕРЕДНЬО ВИМІРЯНИХ ВЕЛИЧИН

4.1. Основна теорема теорії похибок

У геодезичній практиці переважно використовуються не окремі безпосередньо зміряні величини, а їх функції, тобто непрямі вимірювання. Так, наприклад, нахил лінії визначають як відношення безпосередньо виміряного перевищення і довжини лінії. Довжина лінії, недоступної для безпосереднього вимірювання, обчислюється із розв'язання трикутника, у якого безпосередньо виміряні базисна сторона і горизонтальні кути. Площу земельної ділянки прямокутної форми обчислюють як добуток безпосередньо виміряної довжини і ширини ділянки. Перелік подібних прикладів можна продовжувати. Звідси виникає *завдання оцінювання точності функції виміряних величин* за відомими стандартами σ або средньоквадратичними похибками m безпосередньо виміряних аргументів. Для розв'язання цього завдання доведена теорема.

Теорема 4.1. Якщо певна безперервна функція, що диференціюється за всіма аргументами

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_t), \tag{4.1}$$

аргументи якої $x_1, x_2, \dots, x_t$ – незалежні результати безпосередніх вимірів певних величин $X_1, X_2, \dots, X_t$, виконаних в умовах, що характеризуються стандартами $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_t$, то стандарт цієї функції буде дорівнювати

$$\sigma_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \cdot \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \cdot \sigma_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right)^2 \cdot \sigma_t^2}, \tag{4.2}$$

де $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ – частинні похідні функції (4.1) за змінними $x_1, x_2, \dots, x_t$, $i = \overline{1, t}$

Доказ. З курсу математичного аналізу відомо, що повний диференціал функції (4.1) дорівнює

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_t} dx_t. \tag{4.3}$$

Припустимо, що величини $x_1, x_2, \dots, x_t$ виміряні n разів. При цьому результати вимірів містять випадкові похибки, які позначимо:

$$\Delta_1', \Delta_2', \dots, \Delta_t';\ \Delta_1'', \Delta_2'', \dots, \Delta_t'';\ \Delta_1^{(n)}, \Delta_2^{(n)}, \dots, \Delta_t^{(n)}.$$

Наочно в графічній формі величини вимірів і їх похибки, ілюструються рис. 4.1.

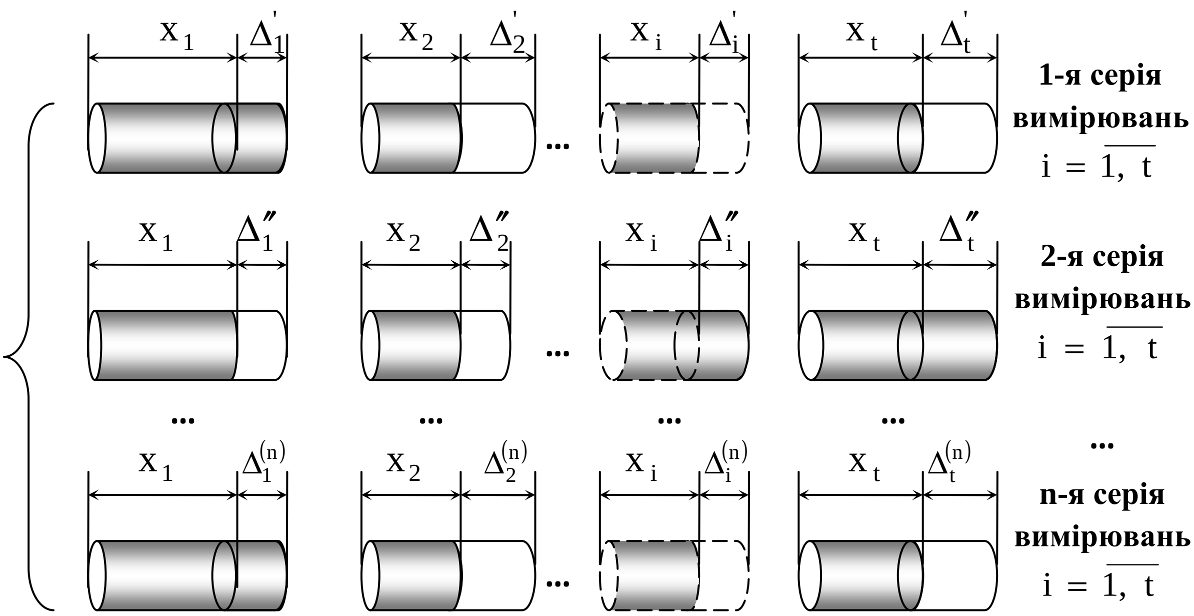


Рис. 4.1 – Графічна інтерпретація величин вимірів і їх похибок

Вважаючи, що похибки Δ_i є приростами величин x_i (малими величинами), то на підставі запису повного диференціала (4.3) можна записати систему рівнянь у частинних похідних, де кожне з рівнянь характеризує зміну похибок у серії вимірів величин $x_1, x_2, \ldots, x_t$

$$\Delta' y = \frac{\partial y}{\partial x_1}\Delta'_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}\Delta'_2 + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_i}\Delta'_i + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_t}\Delta'_t,$$

$$\Delta'' y = \frac{\partial y}{\partial x_1}\Delta''_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}\Delta''_2 + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_i}\Delta''_i + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_t}\Delta''_t,$$

$$\ldots \tag{4.4}$$

$$\Delta^{(n)} y = \frac{\partial y}{\partial x_1}\Delta_1^{(n)} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\Delta_2^{(n)} + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_i}\Delta_i^{(n)} + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_t}\Delta_t^{(n)}.$$

Відзначимо, що кожен елемент $\frac{\partial y}{\partial x_i}\Delta'_i, \frac{\partial y}{\partial x_i}\Delta''_i, \ldots, \frac{\partial y}{\partial x_i}\Delta_i^{(n)}$, $i = \overline{1, t}$ системи рівнянь має константу $\frac{\partial y}{\partial x_i} = const$. Для того, щоб точно оцінити функції вимірянних величин $y = f\,(x_1, x_2, \ldots, x_t)$ з використанням стандарту σ або середньоквадратичної похибки m (див. формулу 2.14 і 3.6) необхідно здійснити наступні перетворення з системою рівнянь (4.4). Звести у квадрат праві та ліві частини кожного з рівнянь. Отримаємо

$$(\Delta' y)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 (\Delta_1')^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 (\Delta_2')^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 (\Delta_i')^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right)^2 (\Delta_t')^2,$$

$$(\Delta'' y)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 (\Delta_1'')^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 (\Delta_2'')^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 (\Delta_i'')^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right)^2 (\Delta_t'')^2,$$

$$\dots \tag{4.5}$$

$$\left(\Delta^{(n)} y\right)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \left(\Delta_1^{(n)}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \left(\Delta_2^{(n)}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 \left(\Delta_i^{(n)}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right)^2 \left(\Delta_t^{(n)}\right)^2.$$

Тепер кожне з рівнянь є сумою квадратів. Для того, щоб привести праві частини рівнянь до вигляду відомих формул скороченого множення многочленів $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ додамо до кожного рівняння суми добутків, що складаються з двох пар у кожному многочлені. Отримаємо

$$(\Delta' y)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 (\Delta_1')^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 (\Delta_2')^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 (\Delta_i')^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right)^2 (\Delta_t')^2 +$$

$$+2\sum \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \Delta_1' \Delta_2' + 2\sum \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_3} \cdot \Delta_1' \Delta_3' + \dots + 2\sum \frac{\partial y}{\partial x_{t-1}} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_t} \cdot \Delta_{t-1}' \Delta_t';$$

$$(\Delta'' y)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 (\Delta_1'')^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 (\Delta_2'')^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 (\Delta_i'')^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right)^2 (\Delta_t'')^2 +$$

$$+2\sum \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \Delta_1'' \Delta_2'' + 2\sum \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_3} \cdot \Delta_1'' \Delta_3'' + \dots + 2\sum \frac{\partial y}{\partial x_{t-1}} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_t} \cdot \Delta_{t-1}'' \Delta_t'';$$

$$\dots \tag{4.6}$$

$$\left(\Delta^{(n)} y\right)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \left(\Delta_1^{(n)}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \left(\Delta_2^{(n)}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 \left(\Delta_i^{(n)}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right)^2 \left(\Delta_t^{(n)}\right)^2 +$$

$$+2\sum \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \Delta_1^{(n)} \Delta_2^{(n)} + 2\sum \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_3} \cdot \Delta_1^{(n)} \Delta_3^{(n)} + \dots + 2\sum \frac{\partial y}{\partial x_{t-1}} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_t} \cdot \Delta_{t-1}^{(n)} \Delta_t^{(n)}.$$

Підсумуємо змінні лівої і правої частини отриманих многочленів і запишемо їх в символах Гаусса К.Ф.

$$[\Delta^2 y] = (\Delta' y)^2 + (\Delta'' y)^2 + \dots + \left(\Delta^j y\right)^2 + \dots + \left(\Delta^{(n)} y\right)^2, j = \overline{1,n};$$

$$[\Delta_1^2] = (\Delta_1')^2 + (\Delta_1'')^2 + \dots + \left(\Delta_1^j\right)^2 + \dots + \left(\Delta_1^{(n)}\right)^2;$$

$$[\Delta_2^2] = (\Delta_2')^2 + (\Delta_2'')^2 + \cdots + \left(\Delta_2^j\right)^2 + \cdots + \left(\Delta_2^{(n)}\right)^2;$$

$$\cdots \tag{4.7}$$

$$[\Delta_t^2] = (\Delta_t')^2 + (\Delta_t'')^2 + \cdots + \left(\Delta_t^j\right)^2 + \cdots + \left(\Delta_t^{(n)}\right)^2;$$

$$\left[\Delta_i\Delta_j\right] = \Delta_1' \cdot \Delta_2' + \Delta_1'' \cdot \Delta_2'' + \cdots + \Delta_1^{(n)}\Delta_2^{(n)};$$

$$\left[\Delta_{i+1}\Delta_{j+1}\right] = \Delta_1' \cdot \Delta_3' + \Delta_1'' \cdot \Delta_3'' + \cdots + \Delta_1^{(n)}\Delta_3^{(n)};$$

$$\cdots$$

$$[\Delta_{t-1}\Delta_t] = \Delta_{t-1}' \cdot \Delta_t' + \Delta_{t-1}'' \cdot \Delta_t'' + \cdots + \Delta_{t-1}^{(n)}\Delta_t^{(n)}.$$

Розділимо отримані суми на n і запишемо остаточний вираз, що враховує всі змінні (похибки Δ_i) системи рівнянь (4.4)

$$\frac{[\Delta^2 y]}{n} = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \frac{[\Delta_1^2]}{n} + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \frac{[\Delta_2^2]}{n} + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right)^2 \frac{[\Delta_t^2]}{n} + 2\sum \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \frac{\left[\Delta_i\Delta_j\right]}{n} +$$

$$+2\sum \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial y}{\partial x_3} \cdot \frac{\left[\Delta_{i+1}\Delta_{j+1}\right]}{n} + \cdots 2\sum \frac{\partial y}{\partial x_{t-1}}\frac{\partial y}{\partial x_t} \cdot \frac{[\Delta_{t-1}\Delta_t]}{n}. \tag{4.8}$$

Припускаючи, що $n \to \infty$, знайдемо межі лівої і правої частини отриманого виразу. На основі властивості незалежності (2.13) маємо наступне:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\Delta_i\Delta_j\right]}{n} = 0. \tag{4.9}$$

Враховуючи властивість розсіювання (2.14) для правої і лівої частини рівняння (4.8) справедливо записати

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[\Delta^2 y]}{n} = \sigma_y^2, \tag{4.10}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[\Delta_i^2]}{n} = \sigma_i^2, i = \overline{1,t}. \tag{4.11}$$

Спростимо вираз (4.8), відкинувши подвійні суми $2\sum \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \frac{\left[\Delta_i\Delta_j\right]}{n}$, оскільки вираз (4.9) їх перетворює на нуль, і, застосовуючи до його лівої частини граничне значення формули (4.10), а до правої частини – граничні значення формули (4.11) і добувши з них квадратний корінь, отримаємо вираз (4.2), що і потрібно було довести.

4.2. Застосування основної теореми для розрахунку гранично допустимої нев'язки

Розрахунок гранично допустимої кутової нев'язки теодолитного ходу

Вважатимемо, що всі кути виміряні теодолітом технічного класу точності в умовах, що характеризуються стандартом σ_β = 30" і є рівноточними. Відомо, що кутова нев'язка обчислюється за формулою

$$f_\beta = \sum \beta_{\text{вим}} - \sum \beta_{\text{теор}} =$$

$$= \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_i + \cdots + \beta_n - \sum \beta_{\text{теор}},\ i = \overline{1,n}, \tag{4.12}$$

де $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ – незалежні змінні величини; $\sum\beta_{теор}$ – для цього ходу є величиною постійною.

Знайдемо частинні похідні функції (4.12) за змінними β_i:

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \beta_1} = \frac{\partial f_\beta}{\partial \beta_2} = \cdots = \frac{\partial f_\beta}{\partial \beta_n} = 1. \tag{4.13}$$

Скористаємося формулою (4.2), що характеризує стандарт цієї функції, і, враховуючи отриману формулу (4.13), а також враховуючи обмеження, що усі виміри рівноточні, можна записати

$$\sigma_{f_\beta} = \sigma_\beta \sqrt{\underbrace{1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2}_{n\ \text{доданків}}} = \sigma_\beta \sqrt{n} = 30''\sqrt{n}.$$

Для розрахунку граничної нев'язки скористаємося виразом (3.10). Тоді для нашого випадку, де σ_β = 30" гранично допустима кутова нев'язка теодолітного ходу розраховується за формулою:

$$f_{\beta_{\text{доп}}} = 2\sigma_{f_\beta} = 1'^{\sqrt{n}}. \tag{4.14}$$

Розрахунок гранично допустимої кутової нев'язки нівелірного ходу

Припустимо, що нівелірний хід довжиною L км. прокладений на рівнинній місцевості, де на кожний кілометр ходу припадає приблизно однакова кількість станцій за середньої відстані $\bar{l}$ між рейками на одній станції. Риска над буквою l позначає середнє значення відстані. Отже, кількість усіх станцій, які припадають на довжину ходу буде близьким до величини

$$n \approx \frac{L}{\bar{l}}\ . \tag{4.15}$$

Крім того, вимірювання на станції вважатимемо за рівноточні, виконані в умовах, що характеризуються стандартом $\sigma_{\text{ст}}$.

Нев'язку нівелірного ходу розраховують за формулою

$$f_h = \sum h_{\text{вим}} - \sum h_{\text{теор}} =$$

$$= h_1 + h_2 + \cdots + h_i + \cdots + h_n - \sum h_{\text{теор}}, i = \overline{1,n}, \tag{4.16}$$

де h_1, h_2,…, h_n як і у виразі (4.12) незалежні змінні $\sum h_{теор}$ – постійна величина.

Знаходимо частинні похідні функції (4.16) за змінними h_i

$$\frac{\partial f_h}{\partial h_1} = \frac{\partial f_h}{\partial h_2} = \cdots = \frac{\partial f_h}{\partial h_n} = 1. \tag{4.17}$$

За аналогією з розрахунком припустимої кутової нев'язки теодолітного ходу для розрахунку припустимої нев'язки нівелірного ходу запишемо

$$\sigma_{f_h} = \sigma_{\text{ст}} \sqrt{\underbrace{1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2}_{n \text{ доданків}}} = \sigma_{\text{ст}} \sqrt{n}. \tag{4.18}$$

Для розрахунку граничної нев'язки нівелірного ходу скористаємося формулою (3.11). Тоді, враховуючи вираз (4.15), отримаємо

$$f_{h_{\text{гр}}} = 3\sigma_{f_h} = \frac{3\sigma_{\text{ст}}\sqrt{L}}{\sqrt{\bar{l}}}. \tag{4.19}$$

Величини стандарту $\sigma_{\text{ст}}$ для кожного класу нівелювання встановлені нормативними документами, тобто є постійними. Спростимо формулу (4.19), ввівши наступне позначення

$$\eta = \frac{3\sigma_{\text{ст}}}{\sqrt{\bar{l}}}$$

і підставимо його у вираз (4.19), отримаємо відому з геодезії формулу

$$f_{h_{\text{гр}}} = \eta\sqrt{L}, \tag{4.20}$$

де η – коефіцієнт, залежний від класу нівелювання. Для *IV* класу η = 20 мм, для технічного нівелювання η = 50 мм.

4.3. Апостеріорна оцінка точності функцій виміряних величин

На практиці при апостеріорній оцінці точності функції $y = f(x_1, x_2,\ldots, x_t)$ виміряних величин $X_1, X_2,\ldots, X_t$ невідомі стандарти $\sigma_1, \sigma_2,\ldots, \sigma_t$ у формулі (4.2) замінюють середніми квадратичними похибками $m_1, m_2,\ldots, m_t$. Тоді

$$m_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \cdot m_1^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \cdot m_2^2 + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right)^2 \cdot m_t^2}, \qquad (4.21)$$

Розрахунки виконуються в наступній послідовності:

1. Функцію (4.1) записують в явному вигляді;
2. Знаходять частинні похідні цієї функції за всіма незалежними змінними (похідні найпоширеніших функцій приведені в додатку **В**);
3. Підставляють частинні похідні і середні квадратичні похибки до формули (4.21);
4. Виконують необхідні математичні перетворення і отримують остаточний результат.

Приклад 4.1. За відомими результатами вимірів: перевищенням h_{AB}=12,6м, довжиною проекції лінії AB d_{AB}= 468 м і оцінками їх точності (середніми квадратичними похибками) m_h = 0,1 м і m_d = 0,5 м відповідно, необхідно знайти середню квадратичну похибку ухилу лінії АВ, схематично зображеної на рис. 4.2.

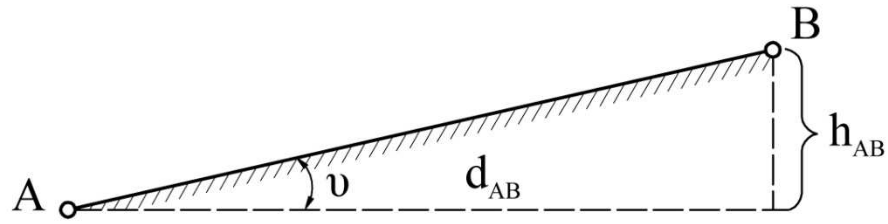


Рис. 4.2 – Графічна інтерпретація ухилу

Рішення. Використовуючи рекомендовану послідовність оцінювання точності виміряних величин, задамо в явному вигляді функцію виміру ухилу відому з геодезії $i = tg\upsilon$, де $i = \frac{h_{AB}}{d_{AB}}$. Підставляючи до формули чисельні значення, отримаємо $i = \frac{12,6}{468} = 0,027$.

Другим кроком у розв’язанні поставленої задачі є знаходження частинних похідних функції $i = \frac{h_{AB}}{d_{AB}}$ за змінними h_{AB} і d_{AB}. Продиференціюємо цю функцію спочатку за змінною h_{AB}, зафіксувавши змінну d_{AB}, отримаємо $\frac{\partial i_{AB}}{\partial h_{AB}} = \frac{1}{d_{AB}}$, а після того за змінною d_{AB} зафіксувавши h_{AB}, $i = \frac{\partial i_{AB}}{\partial d_{AB}} = -\frac{h_{AB}}{d_{AB}^2} = -\frac{i_{AB}}{d_{AB}}$.

На третьому кроці розв'язання поставленої задачі скористаємося формулою (4.21), перетворюючи її на формулу для обчислення середньоквадратичної похибки ухилу. Формула (4.21) прийме вигляд:

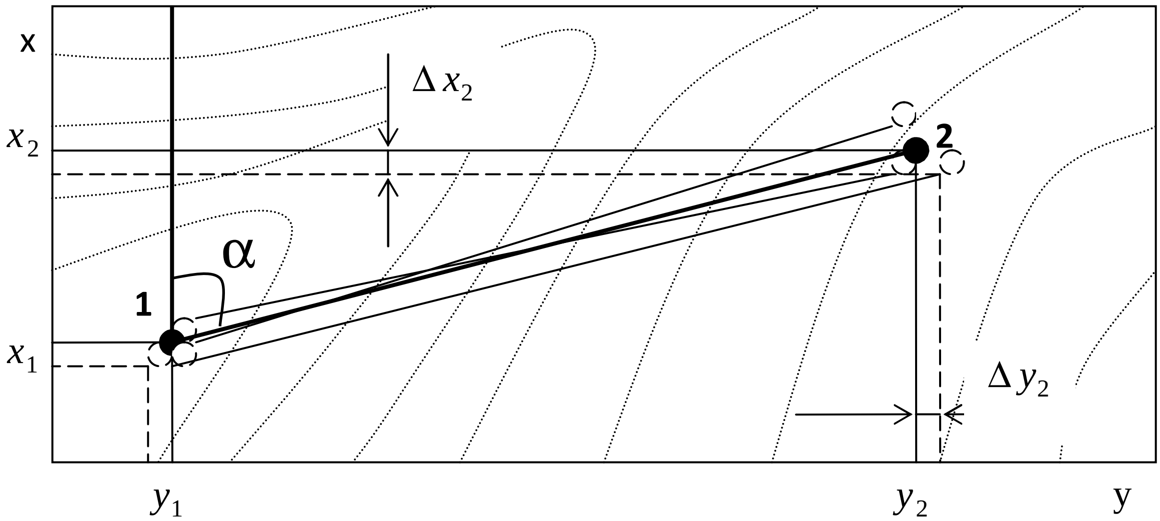
$$m_i = \sqrt{\frac{1}{d^2} m_h^2 + \frac{i^2}{d^2} m_d^2}.$$

На четвертому кроці розв'язання задачі до отриманої формули підставимо чисельні значення і зробимо відповідні обчислення, отримаємо $m_i \approx 0{,}0002$.

Таким чином, завдання знаходження середньої квадратичної похибки ухилу за заданими апостеріорними оцінками розв'язане. Мала величина m_i свідчить про точне визначення ухилу заданої лінії.

Приклад 4.2. На топографічній карті виміряні прямокутні координати *X* і *Y* точок 1 і 2 (рис.4.3). Середні квадратичні похибки визначення координат точок дорівнюють $m_{X_1} = m_{X_2} = m_{Y_1} = m_{Y_2} = \overline{m}$. За координатами обчислені довжина d і дирекційний кут α лінії 1-2.

Необхідно визначити середні квадратичні похибки m_d *і* m_α.



$\Delta x_2, \Delta y_2$ *- похибка одного вимірювання координат точки 2*

Рис. 4.3 – Графічна інтерпретація багатократного вимірювання координат двох точок

Розв'язання. З умов завдання видно, що обчислення довжини лінії d залежить від результатів вимірювання координат точок 1 і 2. Отже, змінними в цьому випадку є координати точок 1 (X_1; Y_1) та 2 (X_2; Y_2),

$$d = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}.$$

Візьмемо частинні похідні від d за змінними X_1 і X_2

$$\frac{\partial d}{\partial X_1} = -\frac{2(X_2 - X_1)}{2\sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}} = -\frac{X_2 - X_1}{d} = -cos\alpha;\ \frac{\partial d}{\partial X_2} = cos\alpha;$$

$$\frac{\partial d}{\partial Y_1} = -\frac{2(Y_2 - Y_1)}{2\sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}} = -\frac{Y_2 - Y_1}{d} = -sin\alpha;\ \frac{\partial d}{\partial Y_2} = sin\alpha.$$

Перетворимо вираз (4.21) з урахуванням результатів диференціювання і рівності середніх квадратичних похибок, заданих в умові завдання. Запишемо

$$m_d = \sqrt{(-cos\alpha)^2 \cdot \left(\overline{m}\right)^2 + (cos\alpha)^2 \cdot \left(\overline{m}\right)^2 + (-sin\alpha)^2 \cdot \left(\overline{m}\right)^2 + (sin\alpha)^2 \cdot \left(\overline{m}\right)^2}.$$

Перетворимо отриманий вираз і винесемо $\overline{m}$ за знак радикала

$$m_d = \overline{m}\sqrt{cos^2\alpha + cos^2\alpha + sin^2\alpha + sin^2\alpha}.$$

Спростимо підкорінний вираз, використовуючи відому тригонометричну формулу $cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$. Тоді $m_d = \overline{m}\sqrt{2}$. Отримана формула для обчислення середньої квадратичної похибки вимірювання m_d довжини лінії d.

Для обчислення середньої квадратичної похибки m_α скористаємося тригонометричною функцією, яка пов'язує дирекційний кут із результатами вимірів координат точок 1 і 2. Така функція очевидна (рис.4.3) і має наступний вигляд:

$$tg\alpha = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}.$$

Для зручності подальших перетворень прологарифмуємо отриману функцію:

$$\ln tg\alpha = \ln(Y_2 - Y_1) - \ln(X_2 - X_1).$$

Обчислимо похідну лівої частини, отриманого рівняння:

$$(\ln tg\alpha)' = \frac{1}{tg\alpha \cdot cos^2\alpha} = \frac{1}{sin\alpha \cdot cos\alpha}.$$

Знайдемо частинні похідні від α за змінними X_1, X_2

$$\frac{\partial\alpha}{\partial X_1}=\frac{sin\alpha\cdot cos\alpha}{X_2-X_1}=-\frac{sin\alpha}{d};\ \frac{\partial\alpha}{\partial X_2}=-\frac{sin\alpha}{d};$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial Y_1}=\frac{sin\alpha\cdot cos\alpha}{Y_2-Y_1}=-\frac{cos\alpha}{d};\ \frac{\partial\alpha}{\partial Y_2}=\frac{cos\alpha}{d};$$

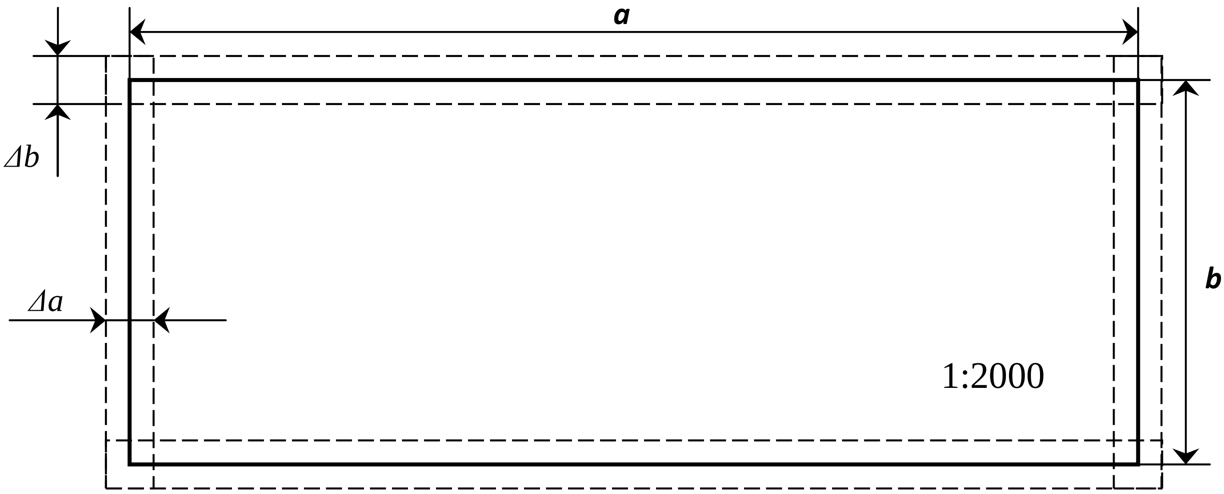
Проводячи перетворення з використанням формули (4.21) і спрощення аналогічні попередньому прикладу, отримаємо

$$m_\alpha=\frac{m}{d}\rho\sqrt{sin^2\alpha+sin^2\alpha+cos^2\alpha+cos^2\alpha}=\frac{m\sqrt{2}}{d}\rho.$$

Тут ρ – коефіцієнт переходу від міри радіану до градусного вимірювання ρ=3438 (кількість минут в одному радіані).

Таким чином, отримано дві прості формули за допомогою, яких можна обчислити значення середньої квадратичної похибки m_d вимірювання довжини лінії d, а також значення середньої квадратичної похибки m_α дирекційного кута α. Причому похибка дирекційного кута, обчисленого за координатами, обернено пропорційна довжині лінії.

Приклад 4.3. Виміряні довжина a = 59,85 м і b = 20,10 м земельної ділянки прямокутної форми з середньою квадратичною відносною похибкою 1:2000. (рис. 4.4).



*Δa, Δb – похибки вимірювання сторін **a** і **b**, які зумовлюють обчислення*

Рис. 4.4 – Геометрична інтерпретація умов розв'язання задачі

Необхідно знайти площу ділянки і середньоквадратичну відносну похибку визначення площі.

Розв'язання. Запишемо формулу обчислення площі земельної ділянки і обчислимо її за відомими даними.

$$F = a \cdot b = 1203 \text{ м}^2.$$

З рис. 4.4 видно, що зміряні величини a і b є змінними і від точності їх вимірювання залежить точність обчислення площі земельної ділянки.

З метою спрощення обчислень прологарифмуємо отриманий вираз $\ln F = \ln a + \ln b$ і знайдемо повний диференціал функції

$$\frac{dF}{F} = \frac{da}{a} + \frac{db}{b}.$$

Замінивши в отриманому виразі диференціали середніми квадратичними похибками, враховуючи формулу (4.21) отримаємо

$$\frac{m_F}{F} = \sqrt{\frac{m_a^2}{a^2} + \frac{m_b^2}{b^2}}.$$

За умовами завдання

$$\frac{m_a}{a} = \frac{m_b}{b} = \frac{1}{2000}$$

Підставимо отримане значення до формулу обчислення середньої квадратичної похибки, і знайдемо

$$\frac{m_F}{F} = \sqrt{\left(\frac{1}{2000}\right)^2 + \left(\frac{1}{2000}\right)^2} = \frac{1}{2000}\sqrt{2} = \frac{1}{1414}.$$

За необхідності у процесі аналізу точності вимірів можна перейти до абсолютних похибок

$$m_F = \frac{1}{1414} F = \frac{1}{1414} a \cdot b = \frac{1203}{1414} \approx 0{,}9 \text{ м}^2.$$

Таким чином, знайдена площа земельної ділянки і показники точності проведених вимірів (середні квадратичні похибки вимірів). Отримані показники можуть бути покращені за рахунок вимірювання земельної ділянки точнішими приладами, а також збільшенням кількості вимірів.

Розглянуті вище приклади приведуть до поняття «Надійність апостеріорної оцінки точності вимірів». Оцінка такої надійності пов'язана з певними труднощами, які зумовлені застосуванням спеціальної технології вимірів і використанням основної теореми теорії похибок. Технологія передбачає вимірювання кожної незалежної змінної декількома серіями і для кожної серії обчислення середньої квадратичної похибки $m_1, m_2,\ldots, mi,\ldots, m_t$ а потім обчислення середньої квадратичної похибки всіх серій вимірів. Продиференціюємо функцію (4.21) за змінними $m_i, i = \overline{1,t}$. У результаті отримаємо

$$m_{m_y} = \frac{1}{m_y}\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^4 m_1^2 \cdot m_{m_1}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^4 m_2^2 \cdot m_{m_2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right)^4 m_t^2 \cdot m_{m_t}^2}. \quad (4.22)$$

Використовуючи раніше отриманий вираз (3.14) $m_{m_i} = \frac{m_i}{\sqrt{2n}}$, підставимо його до виразу (4.22). Отримаємо залежність величини m_{m_y}від кількості вимірів

$$m_{m_y} = \frac{1}{m_y}\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^4 \frac{m_1^4}{2n_1} + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^4 \frac{m_2^4}{2n_2} + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right)^4 \frac{m_t^4}{2n_t}}, \quad (4.23)$$

де $n_i, i = \overline{1,t}$ – кількість вимірів в i-й серії.

Таким чином, очевидно, що підвищення надійності апостеріорної оцінки точності вимірів, пов'язано з додатковими трудовими витратами з серійного вимірювання кожного параметра (незалежною змінною).

Додаткові джерела інформації

1. Бурмистров, Г.А. Теория математической обработки геодезических измерений [Текст]: пособие / Г.А. Бурмистров, В.Д. Большаков. – М.: Недра, 1969. – 400 с.
2. Войславский, Л.К. Теория математической обработки геодезических измерений. Часть 1. Теория погрешностей измерений [Текст] учебно-методическое пособие (для студентов 2 курса дневной формы обучения спец. 7.070908 «Геоинформационные системы и технологии») / Л.К. Войславский. – Х.: ХНАГХ, 2006. – 64 с.
3. Зазуляк, П.М. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірів [Текст] навчальний посібник / П.М. Зазуляк, В.І. Гавриш, Е.М. Євсеєва, М.Д. Йосипчук. – Львів: Видавництво «Растр-7», 2007. – 408 с.

5. МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА РЯДУ РІВНОТОЧНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРІВ ОДНІЄЇ І ТІЄЇ Ж ВЕЛИЧИНИ

5.1. Проста арифметична середина і її властивості

Якщо $l_i, i = \overline{1, n}$ – ряд незалежних результатів рівноточних вимірів однієї і тієї ж величини X, то за якнайкраще наближення до її дійсного значення зазвичай приймають просту арифметичну середину, яка обчислюється за елементарною формулою

$$L = \frac{[l]}{n}, \tag{5.1}$$

де n – кількість рівноточних вимірів, а квадратні дужки означають суму результатів вимірів у символах К.Ф. Гаусса.

Такі обчислення є правомірними, тому що вони враховують властивості арифметичної середини, які розглянемо нижче.

Властивості простої арифметичної середини

Властивість 1. Якщо результати вимірів вільні від систематичних похибок, то проста арифметична середина цих результатів при збільшенні кількості вимірів в межі наближається до дійсного значення вимірюваної величини, тобто

$$\lim_{n \to \infty}(L - X) = 0. \tag{5.2}$$

Враховуючи властивості систематичних похибок можна записати

$$\Delta_1 = l_1 - X;\ \Delta_2 = l_2 - X; \ldots;\ \Delta_n = l_n - X;$$

Використовуючи результати доведення основної теореми теорії похибок, підсумуємо праві і ліві частини отриманих виразів і розділимо їх на n (див. доведення теореми в п.п. 4.1). Отримаємо

$$\frac{[\Delta]}{n} = \frac{[l]}{n} - X.$$

Використовуючи вираз (5.1), очевидно, що отриману рівність можна записати у вигляді

$$\frac{[\Delta]}{n} = L - X.$$

За $n \to \infty$ ліва частина цього виразу на підставі властивості компенсації випадкових похибок (2.11) наближається до нуля. Права його частина так само наближається до нуля, що доводить справедливість виразу (5.2).

Отже, проста арифметична середина L є спроможним оцінити величину X.

Властивість 2. Арифметична середина незалежних рівноточних результатів вимірів має стандарт в $\sqrt{n}$ раз менший стандарту σ цих вимірів.

Представимо вираз (5.1) у вигляді

$$L = \frac{l_1}{n} + \frac{l_2}{n} + \cdots + \frac{l_i}{n} + \cdots + \frac{l_n}{n}, i = \overline{1,n}.$$

Скориставшись процедурами доведення основної теореми теорії похибок в отриманому виразі, візьмемо частинні похідні за кожною змінною l_i

$$\frac{\partial L}{\partial l_i} = \frac{1}{n},$$

тоді формула (4.2) набуває вигляду:

$$\sigma_L = \sqrt{\frac{1}{n^2}\sigma^2 + \frac{1}{n^2}\sigma^2 + \cdots + \frac{1}{n^2}\sigma^2} = \sigma\sqrt{\frac{n}{n^2}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (5.3)$$

Наочно арифметичну середину рівноточних результатів вимірів можна представити, зобразивши графічно (рис. 5.1) ділянки розсіювання похибок Δ і Δ_L.

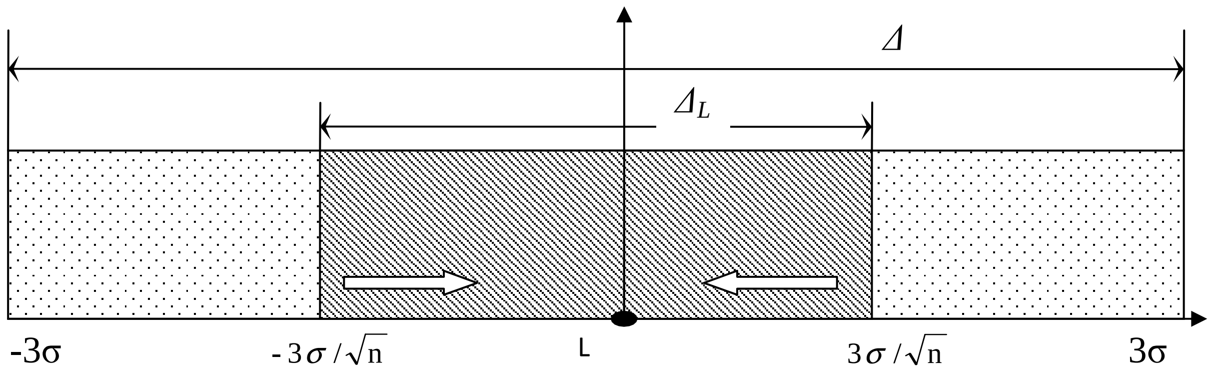


Рис. 5.1 – Ілюстрація розподілу похибок відносно арифметичної середини рівноточних вимірів

Ділянка можливого розсіювання похибок Δ_L буде тим вужча, чим більша кількість вимірів n. У зв'язку з цим виникає питання, чи є збільшення кількості вимірів ефективною процедурою підвищення їх точності? При $n \leq 10$ на це питання можна відповісти позитивно. Але за збільшення кількості вимірів n точність вимірів змінюватиметься повільніше, ніж збільшення n. Так, для підвищення точності в 4 рази буде потрібно 16 вимірів, в 5 разів – 25, в 6 разів – 36, у 10 разів – 100 вимірів.

Крім того, завжди залишаються малі похибки порівняно з випадковими систематичними похибками, які не вдалося цілком виключити. Досягши деякого n вони стають переважаючими у величині L і перешкоджатимуть подальшому підвищенню точності. Таким чином, збільшення кількості вимірів, з одного боку, збільшує їх точність, з іншого боку, велика кількість вимірів вимагає великих витрат часу, що може призвести до зміни умов і неминучого порушення рівноточних вимірів.

Властивість 3. Якщо арифметична середина, отримана з результатів вимірів вільних від систематичних похибок, то і сама вона не містить систематичної похибки.

Припустимо зворотне, тобто результати вимірів містять систематичні похибки $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_i, \ldots, \theta_n$. Тоді на підставі (2.9) можна записати:

$$l_1 - X = \theta_1 + \Delta_1;\ l_2 - X = \theta_2 + \Delta_2; \ldots; l_n - X = \theta_n + \Delta_n.$$

Склавши праві і ліві частини отриманих рівнянь між собою і розділивши їх на n, отримаємо

$$L - X = \frac{[\theta_i]}{n} + \frac{[\Delta_i]}{n}, i = \overline{1, n}.$$

Права частина отриманого рівняння складається з двох доданків, що є систематичною і випадковою похибками арифметичної середини. Звідси випливає, що якщо $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_n = 0$, то і $\frac{[\theta_i]}{n}$ дорівнюватиме 0, що і доводить сформульовану вище властивість.

Таким чином, за відсутності систематичних похибок арифметична середина L є не тільки спроможним, але і незміщеним оцінюванням величини X. Таку оцінку в геодезії називають **найймовірнішим значенням** вимірюваної величини.

За наявності систематичних похибок арифметична середина також міститиме систематичну похибку

$$\theta_L = \frac{[\theta_i]}{n},$$

а тому не має властивостей 1 і 3. У цьому випадку арифметична середина L хоча і дасть якнайкраще з можливих наближень до X, але не буде її найймовірнішим значенням.

Раніше було відзначено, що вплив випадкових похибок можна ослабити належною математичною обробкою. Такого роду обробку називають **зрівнюванням результатів вимірів.**

Результати вимірів зрівнюють шляхом введення в обчислення поправок. Під *точною поправкою* $\overline{v}$ розумітимемо величину, додавши яку до результатів вимірювання *l* отримаємо значення *X*, тобто

$$l + \overline{v} = X\,. \tag{5.4}$$

Перетворимо отриманий вираз і представимо його у вигляді:

$$\overline{v} = -(l - X).$$

З отриманого співвідношення випливає, що точна поправка $\overline{v}$ за абсолютною величиною дорівнює похибці, але протилежна їй за знаком. Відзначимо, що знайти точні поправки у більшості випадків геодезичної практики не є можливим, тому доводиться використовувати наближені поправки. Під *наближеною поправкою* v' розумітимемо величину, додавши яку до результату вимірювання *l* отримаємо деяке наближене до X значення *y*, тобто

$$l + v' = y\,. \tag{5.5}$$

Додавши наближену поправку до результату l_i отримаємо найймовірніше значення *L*, яке називається *найймовірнішою поправкою*, тобто

$$l_i + v'_i = L, i = \overline{1, n}. \tag{5.6}$$

Графічна інтерпретація розглянутих вище поправок ілюструється рис. 5.2 і рис. 5.3.

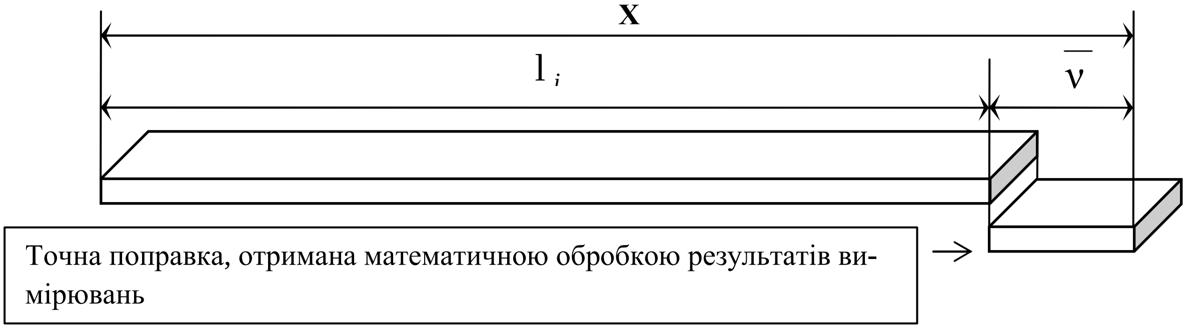


Рис. 5.2 – Ілюстрація зрівнювання результатів вимірів точною поправкою

Наступні властивості (властивість 4 і 5) арифметичної середини пов'язані з найймовірнішими поправками.

Властивість 4. Якщо за ймовірніше значення вимірюваної величини прийнята арифметична середина, то сума найймовірніших поправок дорівнює нулю, тобто

$$[v] = 0\,. \tag{5.7}$$

На підставі (5.6) запишемо наступну систему лінійних рівнянь

$$l_1 + v_1 = L;\ l_2 + v_2 = L; \ldots;\ l_i + v_i = L; \ldots;\ l_n + v_n = L, i = \overline{1,n}. \tag{5.8}$$

Отримані лінійні рівняння підсумуємо і запишемо їх, використовуючи символіку К.Ф. Гаусса

$$[l] + [v] = n \cdot L\,. \tag{5.9}$$

Порівнюючи рівняння (5.9) з перетвореним рівнянням простої арифметичної середини (5.1), а саме $[l] = n \cdot L$ очевидно, що $[v] = 0$.

Властивість 5. Сума квадратів найймовірніших поправок, отриманих з арифметичної середини, завжди менша суми квадратів наближених поправок, отриманих для будь-якої іншої функції тих же результатів вимірів.

На підставі виразу (5.5) і рис.5.3 запишемо систему лінійних рівнянь.

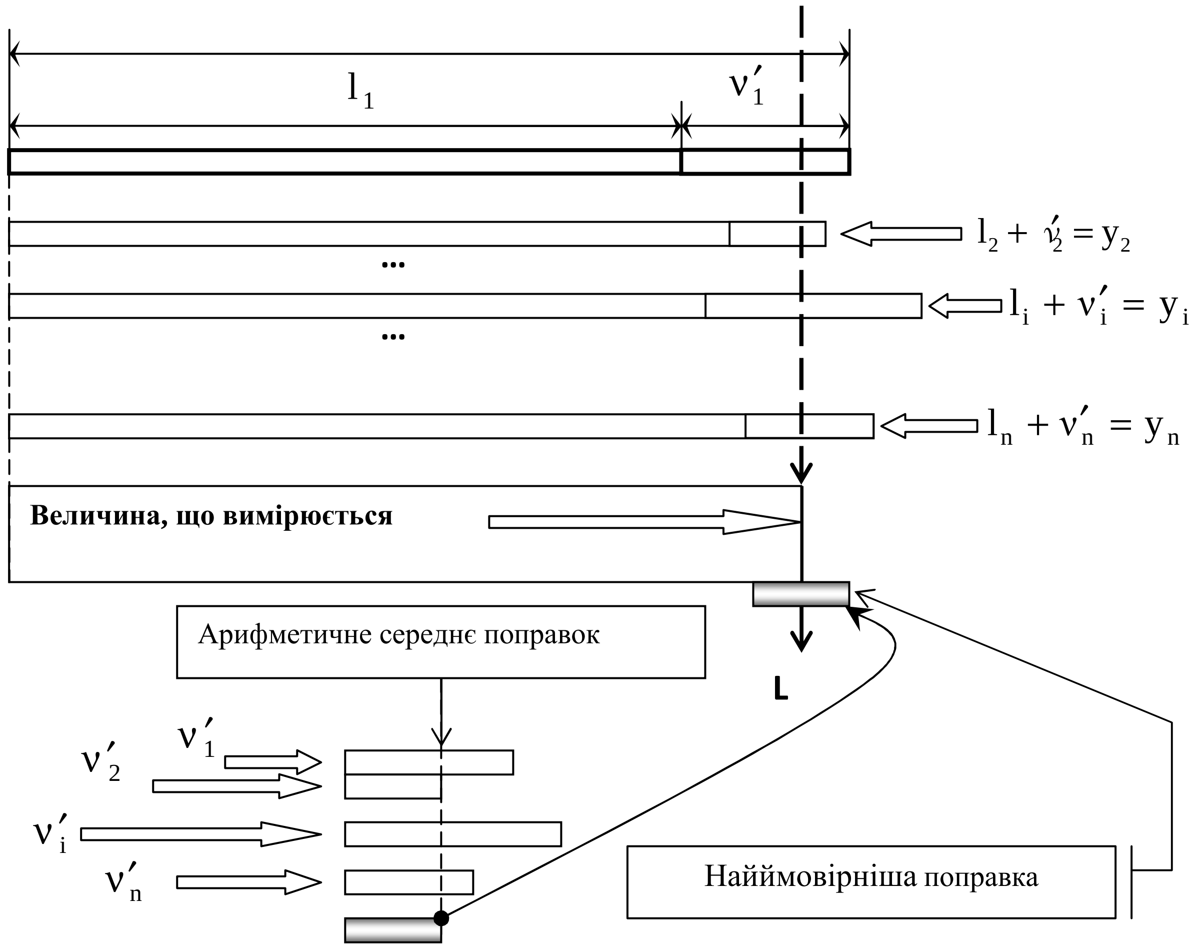


Рис. 5.3 – Ілюстрація зрівнювання результатів вимірів найймовірнішою поправкою

$$l_1 + v'_1 = y;\ l_2 + v'_2 = y; \ldots;\ l_i + v'_i = y; \ldots;\ l_n + v'_n = y, i = \overline{1, n}. \qquad (5.10)$$

Віднімемо від кожного рівняння отриманої системи лінійних рівнянь (5.10) рівняння системи (5.8) і, зробивши відповідні перетворення, отримаємо:

$$v'_1 = v_1 + (y - L);\ v'_2 = v_2 + (y - L); \ldots; v'_n = v_n + (y - L).$$

Піднесемо до квадрата праві і ліві частини отриманих рівнянь

$$(v'_1)^2 = \left(v_1 + (y - L)\right)^2;\ (v'_2)^2 = \left(v_2 + (y - L)\right)^2; \ldots; (v'_n)^2 = \left(v_n + (y - L)\right)^2.$$

Скориставшись формулами скороченого множення многочленів для квадратів, отримаємо

$$(v'_1)^2 = (v_1)^2 + 2v_1 \cdot (y - L) + (y - L)^2;$$
$$(v'_2)^2 = (v_2)^2 + 2v_2 \cdot (y - L) + (y - L)^2;$$
$$\ldots$$
$$(v'_n)^2 = (v_n)^2 + 2v_n \cdot (y - L) + (y - L)^2;$$

Підсумуємо отримані вирази і запишемо їх в символах К.Ф. Гаусса

$$[(v'_i)^2] = [(v_i)^2] + 2[v_i] \cdot (y - L) + n(y - L)^2.$$

У правій частині отриманої рівності середній доданок дорівнює нулю внаслідок того, що $[v] = 0$ (див. формулу 5.7). Тому

$$[(v'_i)^2] = [v_i^2] + n(y - L)^2\ . \qquad (5.11)$$

Звідси випливає нерівність $[(v'_i)^2] > [v_i^2]$ або $[v_i^2] = min$ яка і доводить сформульовану вище властивість.

Таким чином, розглянуті властивості простої арифметичної середини є однією з основних характеристик оцінювання точності рівноточних геодезичних вимірів. Знання властивостей простої арифметичної середини дозволяє правильно організувати математичну обробку рівноточних геодезичних вимірів.

5.2. Формула розрахунку емпіричної середньої квадратичної похибки

У п.3 розглянуті кількісні критерії і чисельні приклади апостеріорної оцінки точності ряду незалежних рівноточних вимірів однієї величини за дійсними похибками. Цей спосіб є, безумовно, ефективним тільки тоді, коли у процесі вимірів поруч з результатами вимірів отримують їх дійсні похибки. Проте у багатьох випадках геодезичної практики дійсні похибки залишаються невідомими. Тому виникає необхідність апостеріорної оцінки точності вимірів за їх результатами.

Наведемо доказ теореми.

Теорема 5.1. Якщо $l_1, l_2, \ldots, l_n$ – результати незалежних рівноточних вимірів, вільних від змінних систематичних похибок, то величина

$$m^2 = \frac{[v^2]}{n-1}\,, \tag{5.12}$$

де v – найймовірніші поправки, є спроможне і незміщене наближення до квадрата стандарту, тобто дисперсії σ^2 випадкових оцінок вимірюваної величини.

Результати вимірів представимо у вигляді:

$$l_1 = X + \Delta_1 + \overline{\theta};\ l_2 = X + \Delta_2 + \overline{\theta}; \ldots;\ l_n = X + \Delta_n + \overline{\theta}\,. \tag{5.13}$$

де $\overline{\theta}$ – постійна систематична похибка; Δ_i – випадкова похибка, X – дійсне значення вимірюваної величини.

Оскільки постійна систематична похибка враховується при обчисленні арифметичної середини, то справедлива рівність

$$L = X + \Delta_L + \overline{\theta}\,, \tag{5.14}$$

де Δ_L – дійсна випадкова похибка арифметичної середини.

Віднімемо з отриманого виразу по черзі кожне із системи рівнянь (5.13) і, зважаючи на систему лінійних рівнянь (5.8) $L = l_1 + v_i, i = \overline{1,n}$ отримаємо наступне: $v_1 = \Delta_L - \Delta_1;\ v_2 = \Delta_L - \Delta_2; \ldots;\ v_n = \Delta_L - \Delta_n$. Представимо ці вирази у наступному вигляді: $\Delta_1 = \Delta_L - v_1;\ \Delta_2 = \Delta_L - v_2; \ldots;\ \Delta_n = \Delta_L - v_n$.

Піднесемо, ліві і праві частини до квадрата, а результати підсумуємо наступним чином:

$$[\Delta^2] = n\Delta_L^2 - 2\Delta_L[v] + [v^2].$$

Підставивши в отриманий вираз формулу (5.7), тобто $[v] = 0$ отримаємо:

$$[\Delta^2] = n\Delta_L^2 + [v^2].$$

Перетворюючи цей вираз отримаємо: $[v^2] = [\Delta^2] - n\Delta_L^2$. У правій частині винесемо за дужку n і поділимо обидві частини рівняння на n-1. У результаті отримаємо

$$\frac{[v^2]}{n-1} = \frac{n}{n-1}\left\{\frac{[\Delta^2]}{n} - \Delta_L^2\right\}. \tag{5.15}$$

Спочатку доведемо, що права частина отриманого виразу є спроможною оцінкою дисперсії. Для цього перейдемо до межі при $n \to \infty$. Скористаємося методами математичного аналізу, зокрема правилом Лопіталя, при розкритті невизначеності $\frac{\infty}{\infty}$ яке є складовою $\frac{n}{n-1}$ правої частини рівняння (5.15), перетворює на одиницю

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-1}=1.$$

Друга складова правої частини рівняння (5.15) через першу властивість простої арифметичної середини при $n\to\infty$ наближається до нуля

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{[\Delta^2]}{n}-\Delta_L^2\right\}=0.$$

Тоді через властивість розсіювання (2.14) випадкових похибок ліву частину рівняння (5.15) справедливо прирівняти до значення дисперсії σ^2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[v^2]}{n-1}=\sigma^2.$$

Таким чином, перша частина теореми доведена.

Для доказу другої частини теореми припустимо, що виконано t серій незалежних рівноточних вимірів

$$l_1', l_2', \dots, l_n''; \; l_1'', l_2'', \dots, l_n''; \; l_1^{(t)}, l_2^{(t)}, \dots, l_n^{(t)}.$$

Для кожної серії вимірів запишемо формулу для розрахунку середньої квадратичної похибки $m_i^2=\frac{[v_i^2]}{n-1}, i=\overline{1,n}$;

$$m_i^2=\frac{n}{n-1}\left\{\frac{[\Delta^2]}{n}-\Delta_{L_i}^2\right\}, i=\overline{1,n},$$

де Δ – похибка кожного вимірювання в серії, а Δ_{L_i} – похибка *i-ї* серії вимірів. Підсумуємо отримані вирази і отримаємо формулу

$$[m^2]=\frac{n}{n-1}\sum_{j=1}^{t}\left\{\frac{[\Delta^2]_j}{n}-\Delta_{L_i}^2\right\}.$$

Особливість запису отриманого виразу полягає в тому, що він записаний на змішаній математичній мові, тобто з використанням формального представлення символу суми «[ ]» К.Ф.Гаусса, а також загальноприйнятого в математиці символу суми «$\sum$».

Розділимо почленно все на t і переходячи до межі при $t\to\infty$ матимемо

$$\lim_{t\to\infty}\frac{[m^2]}{t}=\frac{n}{n-1}\left\{\lim_{t\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{t}[\Delta^2]_j}{n\cdot t}-\lim_{t\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{t}\Delta_{L_i}^2}{t}\right\}. \quad (5.16)$$

Розглянемо границі у фігурних дужках виразу (5.16). Перша границя згідно з властивості розсіювання дорівнює σ^2, оскільки в чисельнику стоїть сума квадратів випадкових похибок, а в знаменнику – їх кількість. Друга границя є границею суми квадратів випадкових похибок арифметичної середини , що ділиться на їх кількість, що згідно властивості розсіювання дорівнює σ_L^2 і, зважаючи на другу властивість арифметичної середини (5.3), отримаємо $\sigma_L^2 = \frac{\sigma^2}{n}$.

Зробивши відповідні підстановки, знаходимо

$$\lim_{t\to\infty} \frac{[m^2]}{t} = \frac{n}{n-1} \cdot \left(\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}\right) = \sigma^2.$$

Отже, оцінка (5.11) є незміщеною. Таким чином, отримано незміщене наближення до стандарту σ, що і потрібно було довести.

Зберігаючи в (5.11) те ж позначення середньої квадратичної похибки m, як і в (3.6), щоб їх якось розрізняти, наближення (5.11) називатимемо **емпіричною середньоквадратичною похибкою.**

5.3. Послідовність математичної обробки ряду рівноточних вимірів однієї і тієї ж величини

Перш ніж безпосередньо підійти до розгляду послідовності математичної обробки рівноточних вимірів виведемо декілька контрольних і допоміжних формул.

Для обчислення простої арифметичної середини на практиці замість формули (5.1) зручно використовувати формулу, що має вигляд

$$L = L_0 + \frac{\delta l_i}{n}, i = \overline{1, n}, \tag{5.17}$$

де L_0 – так званий «умовний нуль», тобто доцільно вибране наближене значення, щоб різниці

$$\delta l_i = l_i - L_0 \to min, \tag{5.18}$$

були малими величинами, δ – деяка погрішність l_i вимірювання. Графічна інтерпретація пошуку арифметичної середини з використанням «умовного нуля» ілюструється рис.5.4.

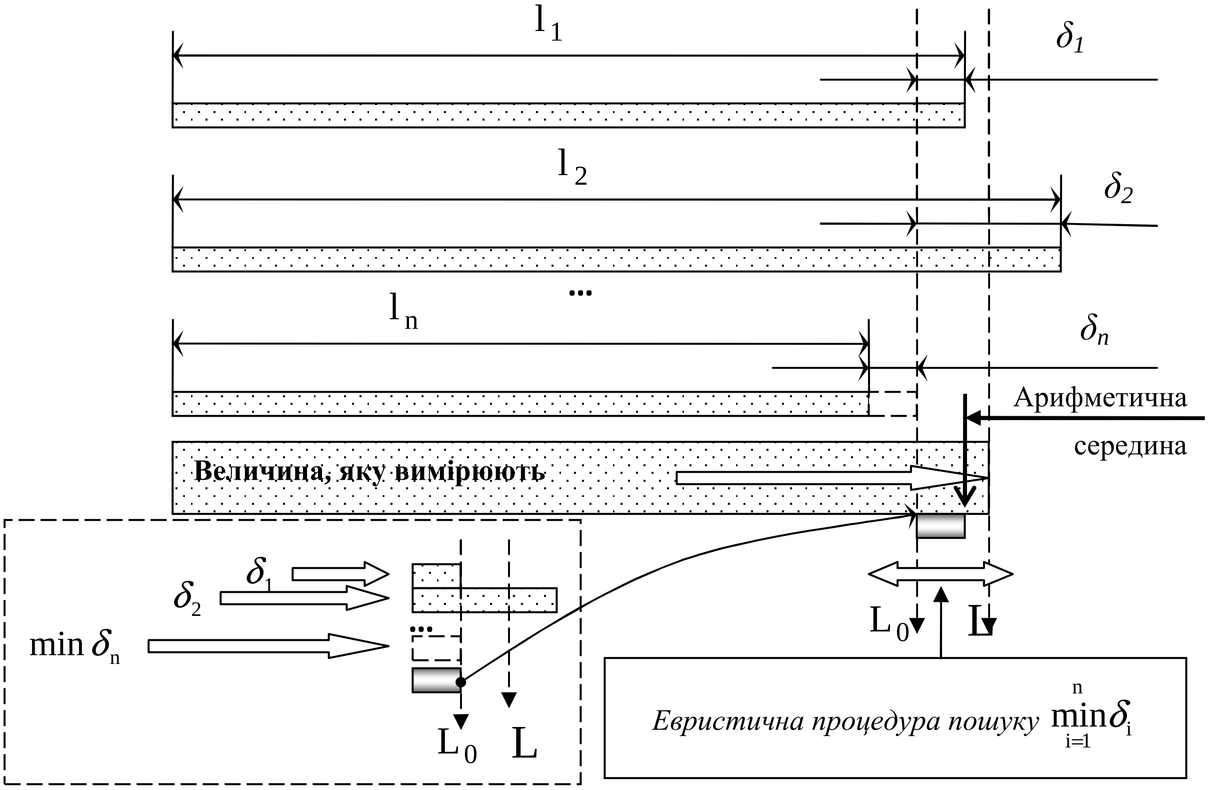


Рис. 5.4 – Ілюстрація знаходження простої арифметичної середини з використанням «умовного нуля»

Дійсно, відповідно до (5.17) і (5.18) можна записати

$$L = L_0 + \frac{[l - L_0]}{n} = L_0 + \frac{[l] - nL_0}{n} = \frac{[l]}{n}.$$

У результаті отримана формула для обчислення простої арифметичної середини (5.1). Далі для обчислення за формулою (5.11) емпіричної середньої квадратичної похибки необхідно спочатку за перетвореною формулою (5.8) обчислити найймовірніші поправки

$$v_i = L - l_i, i = \overline{1, n},$$

Теоретичною перевіркою правильності обчислення арифметичної середини з використанням «умовного нуля» вимірів може служити четверта властивість арифметичної середини. Проте практика показує, що при обчисленні суми найймовірніших поправок за формулою (5.7) процедура округлення отриманих результатів дає зміщене значення L', що відрізняється від значення L на малу величину β, тобто

$$\beta = L' - L, \tag{5.19}$$

і зміщені поправки, також відрізняються від найймовірніших поправок на величину β.

$$v'_i = L' - l_i + \beta, i = \overline{1, n}. \quad (5.20)$$

Вищесказане проілюструємо рис. 5.5.

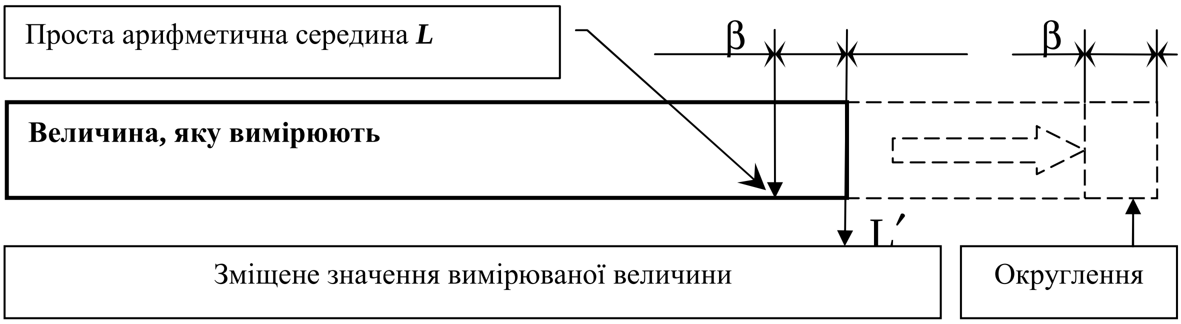


Рис. 5.5 – Ілюстрація зсуву вимірюваної величини за рахунок округлення найймовірніших поправок

Підсумуємо всі від $i = \overline{1, n}$ вирази (5.20) і отримаємо наступний формальний запис:

$$[v'] = nL - [l] + n\beta.$$

Спираючись на перетворення, які зроблені при доведенні теореми (див. п.п. 5.2) можна записати

$$[v'] = n\beta. \quad (5.21)$$

Відповідно до п'ятої властивості арифметичної середини сума наближених поправок виміряної величини $[v']$ більше суми найймовірніших поправок $[v]$. Формально можна записати $[v'] > [v]$.

Для знаходження незміщеного значення вимірюваної величини скористаємося виразом (5.11), який отриманий при обґрунтуванні п'ятої властивості простої арифметичної середини (див. п.п. 5.1). Замінимо в цьому виразі *y* на L':

$$[(v')^2] = [v^2] + n(L' - L)^2. \quad (5.22)$$

Прості перетворення формул (5.19) і (5.21) дозволяють записати рівність

$$L' - L = \beta = \frac{[v']}{n}.$$

Підставляючи отримані вирази до формули (5.22) отримаємо наступне:

$$[v^2] = [(v')^2] - \frac{[v']^2}{n}. \quad (5.23)$$

Отримана сума квадратів найймовірніших поправок вимірюваної величини дорівнює різниці суми квадратів наближеної поправки і середньої величини цих же поправок. Для перевірки правильності математичних побудов знову скористаємося формулою (5.11), замінивши в ній v' на δl, а y на L_0, враховуючи при цьому, що $L_0 - L = \frac{[\delta l]}{n}$ отримаємо

$$[v^2] = [\delta^2 l] - \frac{[\delta l]^2}{n}. \qquad (5.24)$$

Порівнюючи праві частини виразів (5.23) і (5.24) видно, що вони мають один і той же фізичний сенс. Оцінимо надійність обчислень зроблених за формулою (5.12), оскільки емпірична середня квадратична похибка є величиною наближеною. Таку оцінку можна зробити, використовуючи формулу

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}. \qquad (5.25)$$

Для визначення середньої квадратичної похибки арифметичної середини L скористаємося обґрунтуванням другої властивості простої арифметичної середини, а саме формулою (5.3). Замінимо в ній невідомі стандарти σ і σ_L середніми квадратичними похибками m і M, і отримаємо

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}}. \qquad (5.26)$$

На підставі отриманих формул (5.25) і (5.26) надійність величини M можна оцінити, використовуючи формулу

$$m_M = \frac{m_m}{\sqrt{n}}. \qquad (5.27)$$

Розглянуті вище математичні побудови призводять до наступної послідовності математичних процедур з обробки ряду рівноточних вимірів однієї і тієї ж величини.

Процедура 1. Евристична процедура з знаходження умовного нуля L_0.

Процедура 2. Процедура обчислення арифметичної середини, яка полягає в округленні отриманих результатів і визначенні величини зсуву β за формулою (5.19).

Процедура 3. Обчислення зсуву, яка полягає в округленні найймовірніших поправок v' і їх підсумовування.

Процедура 4. Контрольна перевірка правильності виконаних обчислень. Перевіряється співвідношення величини суми найймовірніших поправок ($[v']$), отриманих процедурою 4, і добуток кількості вимірів на величину зсуву $n\beta$. Якщо існує нерівність $[v'] < n\beta$, то обчислення виконані правильно.

Процедура 5. Обчислення значень $(\delta l_i)^2$ і $(v_i')^2$ для кожного вимірювання $i = \overline{1, n}$ і знаходження їх сум.

Процедура 6. Обчислення емпіричної середньої квадратичної похибки m за формулою (5.12), спочатку на основі результатів обчислення $[v^2]$, отриманих за формулою (5.23), а потім на основі результатів обчислення тієї ж величини за формулою (5.24). Обидва результати повинні збігтися в межах точності вимірів.

Процедура 7. Оцінювання надійності обчислення наближеного значення емпіричної середньої квадратичної похибки результатів вимірів за формулою (5.25).

Процедура 8. Обчислення середньої квадратичної похибки простої арифметичної середини вимірюваної величини L за формулою (5.26).

Процедура 9. Оцінка надійності отриманих результатів вимірювання здійснюється за формулою (5.27).

Використовуючи наведені вище процедури розглянемо приклад математичної обробки ряду незалежних рівноточних вимірів величини горизонтального кута, зроблених 16 прийомами теодолітом 2Т5.

Приклад 5.1. Результати вимірів:

$L_1 = 115° 14' 42{,}1''$;	$L_7 = 115° 14' 29{,}8''$;	$L_{13} = 115° 14' 32{,}0''$;
$L_2 = 115° 14' 35{,}2''$;	$L_8 = 115° 14' 29{,}1''$;	$L_{14} = 115° 14' 41{,}4''$;
$L_3 = 115° 14' 35{,}4''$;	$L_9 = 115° 14' 35{,}3''$;	$L_{15} = 115° 14' 21{,}5''$;
$L_4 = 115° 14' 34{,}4''$;	$L_{10} = 115° 14' 39{,}0''$;	$L_{16} = 115° 14' 34{,}6''$;
$L_5 = 115° 14' 28{,}7''$;	$L_{11} = 115° 14' 32{,}1''$;	
$L_6 = 115° 14' 37{,}3''$;	$L_{12} = 115° 14' 27{,}5''$;	

Враховуючи рекомендації **першої процедури,** за значення умовного нуля приймемо величину $L_0 = 115° 14' 30{,}0''$. Знайдемо значення величин $\delta l_i = L_0 - l_i$ і підсумуємо їх. Результати двох процедур наведено в табл. 5.1.

Виконуючи **другу процедуру** обчислимо за формулою (5.17) просту арифметичну середину, округлимо отриманий результат до $0{,}1''$ і визначимо величину зсуву β за формулою (5.19).

Відповідно до **третьої процедури** обчислимо зсув, який утворюється за рахунок округлення найймовірніших поправок v' і підсумуємо їх (див. стовпець 5 табл. 5.1).

Виконаємо контрольну, **четверту процедуру**, і порівняємо $[v']$ з величиною $n\beta$. Результат порівняння показує, що величина $[v']$ на 0,04 менше величини $n\beta$. Отже, обчислення виконані правильно.

Таблиця 5.1 – Вихідні дані і проміжні результати
їх математичної обробки

№ з/п	Результати вимірів l_i	δl_i (с)	δl_i^2	v_i (с)	$(v_i')^2$
1	2	3	4	5	6
1	115° 14' 42,1"	12.1	146.4	-8.6	74.0
2	115° 14' 35,2"	5.2	27.0	-1.7	2.9
3	115° 14' 35,4"	5.4	29.2	-1.9	3.6
4	115° 14' 34,4"	4.4	19.4	-0.9	0.8
5	115° 14' 28,7"	-1.3	1.7	4.8	23.0
6	115° 14' 37,3"	7.3	53.3	-3.8	14.4
7	115° 14' 29,8"	-0.2	0	3.7	13.7
8	115° 14' 29,1"	-0.9	0.8	4.4	19.4
9	115° 14' 35,3"	5.3	28.1	-1.8	3.2
10	115° 14' 39,0"	9.0	81.0	-5.5	30.2
11	115° 14' 32,1"	2.1	4.4	1.4	2.0
12	115° 14' 27,5"	-2.5	6.2	6.0	36.0
13	115° 14' 32,0"	2.0	4.0	1.5	2.2
14	115° 14' 41,4"	11.4	130.0	-7.9	62.4
15	115° 14' 21,5"	-8.5	72.2	12.0	144.0
16	115° 14' 34,6"	4.6	21.2	-1.1	1.2
	L_0=115° 14' 30,0"	$[\delta l]$=55,4	$[(\delta l_i)^2]$ =624,9	$[v_i']$=0,6	$[(v_i')^2]$=433,0
	$[\delta l]/n$=3,46"			$n\beta$=0,64	
	L'=115° 14' 33,5"				
	β=0,04				

П’ята процедура забезпечує обчислення квадратів $(\delta l_i)^2$ і $(v_i')^2$.

Відповідно до **шостої процедури** зробимо обчислення значень емпіричної середньої квадратичної похибки m спочатку за формулами (5.12) і (5.23), а потім використовуючи формули (5.12) і (5.24).

Зробимо елементарні перетворення формули (5.12) і підставивши до неї двічі чисельні значення, отримані при обчисленні $[v^2]$ за формулами (5.23) і (5.24), матимемо:

- результат обчислення емпіричної середньої квадратичної похибки із використанням чисельних розрахунків за формулою (5.23)

$$m = \sqrt{\frac{433 - \frac{0.6^2}{16}}{16 - 1}} = 5{,}4'';$$

- результат обчислення емпіричної середньої квадратичної похибки із використанням чисельних розрахунків за формулою (5.24)

$$m = \sqrt{\frac{624 - \frac{55.4^2}{16}}{16 - 1}} = 5{,}4''.$$

Рівність отриманих результатів показує правильність математичних розрахунків емпіричної середньої квадратичної похибки.

Оцінювання надійності обчислення наближеного значення емпіричної середньої квадратичної похибки результатів вимірів здійснюється за **сьомою процедурою** із використанням формули (5.25). Підставляючи до формули чисельне значення m = 5,4" отримаємо

$$m_m = \frac{5{,}4}{\sqrt{2(16 - 1)}} \approx 1'',$$

що свідчить про високу надійність наближеного оцінювання емпіричної середньої квадратичної похибки результатів вимірів.

Восьмою процедурою обчислюється середня квадратична похибка знаходження простої арифметичної середини вимірюваної величини L. Підставляючи до формули (5.26) отримані чисельні значення, маємо

$$M = \frac{5{,}4}{\sqrt{16}} \approx 1{,}4''.$$

Остаточною, **дев'ятою процедурою**, здійснюється оцінювання надійності отриманих результатів вимірів. Для цього обчислюється за формулою (5.27) значення середньої квадратичної похибки результатів вимірів

$$m_M = \frac{1}{\sqrt{16}} = 0{,}25'',$$

яке порівнюється з сумарною ймовірною похибкою. У нашому випадку середня квадратична похибка майже в два з половиною рази менша сумарної найймовірнішої похибки, що свідчить про задовільну надійність отриманих результатів.

Таким чином, на підставі раніше розглянутих понять простої арифметичної середини і її властивостей, а також теореми про знаходження емпіричної середньої квадратичної похибки сформована строга послідовність математичної обробки ряду рівноточних результатів вимірів. Математична обробка включає десять процедур, що забезпечують як обчислення необхідних величин, так і контроль правильності їх виконання. Наводиться конкретний приклад математичної обробки результатів вимірів горизонтального кута, що показує працездатність сформованої послідовності математичних побудов.

Додаткові джерела інформації

1. Бурмистров, Г.А. Теория математической обработки геодезических измерений [Текст]: пособие / Г.А. Бурмистров, В.Д.Большаков. – М.: Недра, 1969. – 400 с.
2. Войславский, Л.К. Теория математической обработки геодезических измерений. Часть 1. Теория погрешностей измерений [Текст] учебно-методическое пособие (для студентов 2 курса дневной формы обучения спец. 7.070908 «Геоинформационные системы и технологии») / Л.К. Войславский. – Х.: ХНАГХ, 2006. – 64 с.
3. Зазуляк, П.М. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірів [Текст] навчальний посібник / П.М. Зазуляк, В.І. Гавриш, Е.М. Євсєєва, М.Д.Йосипчук. – Львів: Видавництво «Растр-7», 2007. – 408 с.
4. Кемниц, Ю.В. Теория ошибок измерений [Текст] / Ю.В.Кемниц. – М.: Недра, 1962. – 175 с.

6. НЕРІВНОТОЧНІ ВИМІРИ

6.1. Вага як спеціальна міра відносної точності результатів нерівноточних вимірів

Наближеними значеннями до стандарту є середня квадратична і емпірична середня квадратична похибки вимірюваної величини. Вони ж є абсолютними кількісними мірами точності результатів вимірів і їх функцій. При зрівнюванні нерівноточних вимірів виникає необхідність вводити спеціальну міру точності. Такою мірою є вага, формула обчислення якої (2.15) наведена в п.п. 2.5. Розглянемо детально фізичний сенс цього поняття.

Вага це спеціальна характеристика відносної точності вимірів і їх функцій, обчислена як величина, обернено пропорційна квадрату стандарта, тобто дисперсії результатів випадкових вимірів.

Якщо існує ряд нерівноточних результатів вимірів $l_1, l_2,\ldots, l_n$ точність яких характеризується стандартами $\sigma_1, \sigma_2,\ldots, \sigma_n$ відповідно, то ваги, що характеризують їх відносну точність, визначаються відношеннями

$$p_1 = \frac{c}{\sigma_1^2};\ p_2 = \frac{c}{\sigma_2^2};\ \dots;\ p_n = \frac{c}{\sigma_n^2}, \qquad (6.1)$$

де c – загальний коефіцієнт пропорційності.

Звідси випливає, що вибір c із рівним квадрату стандарту σ_i^2 деякого результату виміри (реального або уявного) рівнозначний прийняттю ваги цього результату за одиницю.

Позначимо стандарт результату виміру, що має вагу, рівну одиниці символом $\overline{\sigma}$.

Тоді рівняння (6.1) можна записати у наступному вигляді:

$$p_1 = \frac{\overline{\sigma}}{\sigma_1^2};\ p_2 = \frac{\overline{\sigma}}{\sigma_2^2};\ \dots;\ p_n = \frac{\overline{\sigma}}{\sigma_n^2}. \qquad (6.2)$$

Величину $\overline{\sigma}$ прийнято називати стандартом одиниці ваги, а його наближені значення відповідно середньою квадратичною похибкою одиниці ваги і емпіричною середньою квадратичною похибкою одиниці ваги.

Як випливає з наведених вище міркувань і виразів (6.1) і (6.2), результати рівноточних вимірів, що мають однакові стандарти, тобто $\sigma_1=\sigma_2=\ldots=\sigma_n$ матимуть однакову вагу, яку можна прийняти рівною одиниці $p_1=p_2=\ldots=p_n=1$.

Очевидно, що результати нерівноточних вимірів, отримані за різних умов, матимуть нерівні ваги. Визначимо значення простої арифметичної середини L незалежних нерівноточних результатів вимірів. Для цього зробимо наступні математичні перетворення. На підставі формальних співвідношень (6.1) запишемо пропорцію

$$\frac{p_L}{p} = \frac{\sigma^2}{\sigma_L^2}, \qquad (6.3)$$

де σ – стандарт окремого виміру; σ_L – стандарт простої арифметичної середини.

Враховуючи результати обґрунтування другої властивості простої арифметичної середини, а саме формальні перетворення (5.3), можна записати

$$\sigma_L = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Підставляючи значення σ_L у пропорцію (6.3), отримаємо

$$p_L = np. \qquad (6.4)$$

Звідси випливає, що вага арифметичної середини незалежних нерівноточних результатів вимірів в n разів більше ваги окремого результату.

Припустивши, що стандарт одиниці ваги дорівнює середній квадратичній похибці одиниці ваги (див. формулу (6.2)), формула (6.4) набере вигляду

$$p_L = p. \tag{6.5}$$

Таким чином, вага арифметичної середини незалежних результатів вимірів одиничної ваги дорівнює кількості цих результатів. При обробці результатів однорідних вимірів їх ваги є безрозмірними величинами. Якщо ж результати вимірів мають різну розмірність, наприклад, довжини лінії виміряні в метрах, а горизонтальні кути в секундах, то вага буде іменованою величиною $p = \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}$.

6.2. Вага функцій результатів нерівноточних вимірів

Для оцінки відносної точності функції незалежних результатів нерівноточних вимірів скористаємося формулою, яка випливає з доведення основної теореми теорії похибок, а саме формули (4.2)

$$\sigma_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \cdot \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \cdot \sigma_2^2 + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right)^2 \cdot \sigma_t^2}.$$

Перетворимо отриману формулу з метою переходу в ній від стандартів σ до вагів p. Для цього піднесемо ліву і праву частину формули (4.2) до квадрату і підставимо замість квадратів стандартів σ_i^2 вирази (6.1) $\sigma_i^2 = \frac{c}{p_i}$ та, скоротивши ліву і праву частини на загальний множник c, отримаємо формальний запис

$$\frac{1}{p_y} = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \cdot \frac{1}{p_1} + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \cdot \frac{1}{p_2} + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right)^2 \cdot \frac{1}{p_t}. \tag{6.6}$$

Розглянемо простий окремий випадок використання формули (6.6) для функції з однією змінною $y = cx$. Підставимо цю формулу до (6.6) і, зробивши відповідні перетворення, отримаємо $\frac{1}{p_y} = c^2 \frac{1}{p_x}$ або $p_y = \frac{p_x}{c^2}$. Застосувавши цю рівність до кожного виміру $u = l_i \cdot \sqrt{p_i}$, де l_i – результат *i-го* вимірювання, а p_i – його вага, отримаємо

$$p_u = \frac{p_i}{(\sqrt{p_i})^2} = 1. \tag{6.7}$$

Отже, з цих математичних побудов випливає, що якщо помножити результат вимірів на корінь квадратний з його ваги, то вага добутку $l_i \cdot \sqrt{p_i}$ дорівнюватиме одиниці, а його стандарт дорівнюватиме стандарту одиниці ваги $\overline{\sigma}$.

З пропорції (6.2), отриманої на основі (6.1) запишемо $\frac{\sigma_y^2}{\bar{\sigma}^2} = \frac{1}{p_y}$. Перетворюючи цю формулу знайдемо вагу p_y і стандарт σ_y функції $y=cx$, $p_y = \frac{\bar{\sigma}^2}{\sigma_y^2}$

$$\sigma_y = \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{p_y}}. \tag{6.8}$$

На основі нескладних математичних перетворень отримані формули, які пов'язують вагу функції результатів нерівноточних вимірів із її точностними характеристики.

Таким чином, для того, щоб знайти значення стандарту будь-якого результату виміру або його функції, достатньо стандарт одиниці ваги розділити на корінь квадратний ваги цього результату або його функції.

При визначенні ваг на практиці можливі два випадки.

1. Стандарти результатів вимірів відомі або можуть бути визначені теоретично. У цьому випадку для розрахунку вагів використовують вирази (6.1), (6.2) і (6.3).

2. У випадку, якщо стандарти невідомі, то вагам можна дати приблизну оцінку, підставляючи у формулу (6.1) приблизні значення середніх або емпіричних середніх квадратичних похибок, тобто

$$p_u = \frac{c}{m_i^2}, i = \overline{1,n}. \tag{6.9}$$

Розглянемо приклади математичних побудов для розрахунку вагів у геодезичній практиці.

Приклад 6.1. Математичні перетворення для розрахунку ваги суми кутів теодолітного ходу, виміряних за однакових умов.

Особливістю розв'язання цієї задачі полягає в тому, що вимір кутів теодолітного ходу є рівноточним, тобто їх ваги $p_1=p_2=\ldots=p_n=1$. Враховуючи цю особливість формула (6.6) набере наступний вигляд

$$\frac{1}{p_{[\beta]}} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots \frac{1}{p_n}.$$

Підставляючи до формули замість $p_i, i = \overline{1,n}$ p_i, одиничне значення, маємо

$$p_{[\beta]} = \frac{1}{n}, \tag{6.10}$$

тобто вага суми кутів теодолітного ходу обернено пропорційна кількості виміряних кутів цього ходу.

Приклад 6.2. Математичні перетворення для розрахунку ваги лінійних вимірів полігонометричного (теодолітного) ходу. Графічна інтерпретація лінійних вимірів теодолітного ходу ілюструється рис. 6.1.

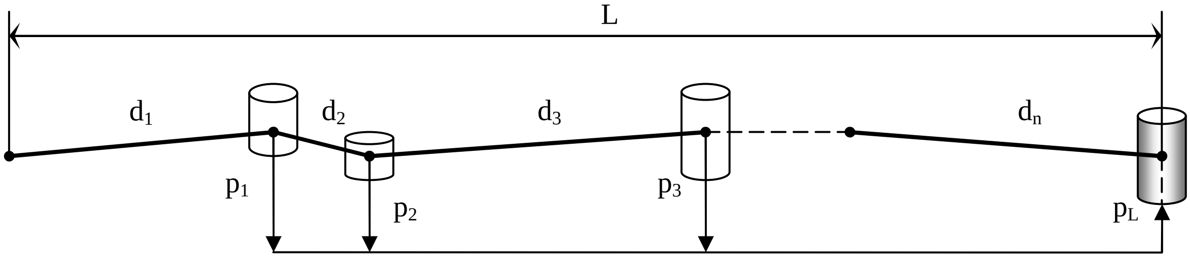


Рис. 6.1 – Ілюстрація до прикладу 6.2

У основу математичних перетворень для розрахунку ваги лінійних вимірів полігонометричного ходу покладений відомий в геодезії факт, що довжина ходу дорівнює сумі довжин його сторін. Цей факт математично можна записати у вигляді рівняння

$$L = d_1 + d_2 + \cdots + d_n = [d]. \qquad (6.11)$$

Крім того, відомо, що стандарт довжини лінії за відсутності систематичних похибок пропорційний кореню квадратному від довжини лінії

$$\sigma_d = \mu_d \sqrt{d},$$

де μ_d – коефіцієнт випадкового впливу.

Тоді підставляючи до виразів (6.2) σ_d для кожної лінії отримаємо формули для обчислення ваги виміряних ліній

$$p_1 = \frac{\bar{\sigma}^2}{\mu_d d_1}, p_2 = \frac{\bar{\sigma}^2}{\mu_d d_2}, \dots, p_n = \frac{\bar{\sigma}^2}{\mu_d d_n}. \qquad (6.12)$$

В отриманих виразах виділимо постійну величину і позначимо її

$$c = \frac{\bar{\sigma}^2}{\mu_d},$$

тоді на підставі (6.3) і з урахуванням виразів (6.11) і (6.12) отримаємо

$$\frac{1}{p_L} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} = \frac{1}{c}(d_1 + d_2 + \cdots + d_n) = \frac{[d]}{c} = \frac{L}{c}.$$

Спростивши отриманий вираз, маємо

$$p_L = \frac{c}{L}\ . \qquad (6.13)$$

Таким чином, вага лінійного виміру полігонометричного ходу обернено пропорційна довжині ходу.

Приклад 6.3. Математичні перетворення для розрахунку ваги перевищення нівелірного ходу, прокладеного на рівнинній місцевості.

Якщо хід прокладений на рівнинній місцевості при середній відстані між рейками $\bar{l}$ кількість станцій в ході буде дорівнювати $n \approx \frac{L}{\bar{l}}$.

Враховуючи формулу (6.6) запишемо

$$\frac{1}{p_L} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n}, \tag{6.14}$$

де $p_1, p_2, \ldots, p_n = 1$ – ваги виміряних перевищень на станції. Беручи до уваги, що на всіх станціях перевищення виміряні в однакових умовах (рівноточно), тобто $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$ вираз (6.14) можна представити у вигляді

$$\frac{1}{\tilde{p}_L} = \frac{L}{\bar{l}} \frac{1}{\tilde{p}}.$$

Позначивши $c = \bar{l}p$ отримаємо $\frac{1}{p_L} = \frac{L}{c}$ звідки випливає

$$p_L = \frac{c}{L}. \tag{6.15}$$

Слід відзначити рівність формул (6.13) і (6.15), тобто вага перевищення нівелірного ходу, прокладеного на рівнинній місцевості так само, як і за вимірів полігометричного ходу (див. приклад 6.2), обернено пропорційна довжині ходу.

Аналогічно можна довести, що вага перевищення нівелірного ходу, прокладеного на пересіченій місцевості, обернено пропорційна кількості станцій, тобто

$$p_n = \frac{c}{n}. \tag{6.16}$$

Таким чином, розглянуті особливості математичних перетворень, що забезпечують оцінку відносної точності функції незалежних результатів нерівноточних вимірів, а також приклади математичних побудов, що дозволяють розраховувати ваги функціональних залежностей, отриманих з геодезичної практики.

6.3. Загальна арифметична середина і її властивості

Якщо $l_1, l_2, \ldots, l_n$ – незалежні результати вимірів однієї і тієї ж величини X, відносна точність яких характеризується відповідно вагами $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (вимірювання нерівноточні) то за якнайкраще наближені до величини X приймають загальну арифметичну середину

$$L = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + \cdots + p_n l_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = \frac{[pl]}{[p]}. \qquad (6.17)$$

Величину L часто називають середньою зваженою.

Отриману формулу (6.17) можна застосовувати лише тоді, коли окремі результати вимірів можливо порівнювати і вони мають величини одного порядку. Не можна усереднювати результати, отримані за умов вимірів, що суттєво відрізняться, наприклад, не можна усереднювати довжину лінії, виміряну один раз звичайною рулеткою, а другий раз світлодальноміром, або величину кута, виміряного один раз технічним теодолітом, а другий раз високоточним теодолітом. Виходячи з вищевикладеного випливає, що на ваги у формулі (6.17) мають бути накладені обмежувальні умови, які можна виразити нерівністю

$$c_1 \leq p_i \leq c_2, i = \overline{1, n}, \qquad (6.18)$$

де c_1, c_2 – деякі позитивні постійні.

За аналогією з математичними побудовами виконаними в п.п.5.1 розглянемо основні властивості загальної арифметичної середини незалежних нерівноточних результатів вимірів.

Властивості загальної арифметичної середини

Властивість 1. Вага загальної арифметичної середини незалежних нерівнаточних результатів вимірів дорівнює сумі вагів цих вимірів.

Для математичного обґрунтування цього твердження представимо формулу (6.17) у вигляді

$$L = \frac{p_1 l_1}{[p]} + \frac{p_2 l_2}{[p]} + \cdots + \frac{p_n l_n}{[p]}.$$

Розглядаючи L як функцію незалежних змінних l_1, l_2,…, l_n для визначення її ваги, знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial L}{\partial l} = \frac{p_i}{[p]}, i = \overline{1, n},$$

і підставимо їх до формули (6.6). У результаті отримаємо наступне співвідношення

$$\frac{1}{p_L} = \frac{p_1^2}{[p]^2} \cdot \frac{1}{p_1} + \frac{p_2^2}{[p]^2} \cdot \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{p_n^2}{[p]^2} \cdot \frac{[p]}{[p]^2}.$$

Після скорочень і перетворення отриманої формули, маємо

$$p_L = [p], \tag{6.19}$$

що формально демонструє вірність властивості 1. Відповідно стандарт загальної арифметичної середини, враховуючи формулу (6.8), буде рівний

$$\sigma_L = \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{[p]}}. \tag{6.20}$$

Властивість 2. Якщо загальна арифметична середина отримане з результатів вимірів, вільних від систематичних похибок, то і сама вона не містить систематичної похибки.

Ця властивість, аналогічно третій властивості простої арифметичної середини, яка розглядалася для ряду рівноточних вимірів в п.п.5.1. Тому справедливим є запис

$$l_1 - X = \theta_1 + \Delta_1;\ l_2 - X = \theta_2 + \Delta_2; \dots;\ l_n - X = \theta_n + \Delta_n.$$

Помноживши кожну з цих рівностей на відповідну вагу $p_i, i = \overline{1,n}$, та склавши почленно і розділивши на $[p]$ отримаємо

$$p_1 l_1 - p_1 X = p_1\theta_1 + p_1\Delta_1;\ p_2 l_2 - p_2 X =$$
$$= p_2\theta_2 + p_2\Delta_2; \dots;\ p_n l_n - p_n X = p_n\theta_n + p_n\Delta_n,$$
$$\frac{[pl]}{[p]} - X = \frac{[p\theta]}{[p]} + \frac{[p\Delta]}{[p]}.$$

Права частина отриманої рівності складається з двох частин, які відповідають систематичній і випадковій похибкам загальної арифметичної середини. Звідси витікає, що якщо $\theta_1=\theta_2=\ldots=\theta_n$ дорівнює нулю, то і $[p\theta]$ дорівнюватиме нулю, що і доводить сформульовану вище властивість.

Властивість 3. Якщо результати нерівноточних вимірів вільні від систематичних похибок, то їх загальна арифметична середина при збільшенні кількості вимірів наближається до істинного значення вимірюваної величини.

За аналогією з першою властивістю простої арифметичної середини для ряду рівноточних результатів вимірів запишемо

$$\lim_{n\to\infty}(L - X) = 0\,. \tag{6.21}$$

На підставі обмежувальних умов на вимірювання (6.18) запишемо наступні нерівності $c_1<p_1$; $c_1<p_2$;…; $c_1<p_n$. Підсумуємо праві і ліві їх частини і отримаємо нову нерівність $nc_i < [p_i], i = \overline{1,n}$. Звідки можна зробити висновок, що за $n\to\infty$ має місце границя

$$\lim_{n\to\infty}[p] = \infty\,. \tag{6.22}$$

З отриманого виразу (6.22) і формули (6.20) виходить, що стандарт σ_L наближатиметься до нуля, тобто при $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_L = 0\,. \tag{6.23}$$

Це означає, що загальна арифметична середина L наближатиметься до постійної величини, а оскільки постійна величина не може містити систематичної похибки, то вона має дорівнювати вимірюваній величині X.

На підставі третьої і другої властивості можна зробити висновок, що за відсутності систематичних похибок загальна арифметична середина L є спроможною і незміщеною оцінкою X.

Властивість 4. Сума добутків відхилень результатів вимірів від загальної арифметичної середини

$$v_i = L - l_i, i = \overline{1,n}. \tag{6.24}$$

на відповідні їх ваги дорівнює нулю, тобто

$$[pv] = 0. \tag{6.25}$$

Помножимо почленно кожний вираз із системи рівнянь (6.24) на відповідні ваги $p_i, i = \overline{1,n}$ і, підсумувавши отриману у такий спосіб рівність, матимемо

$$[pv] = [p]L - [pl].$$

Враховуючи формулу для знаходження загальної арифметичної середини (6.17) $L = \frac{[pl]}{[l]}$ підставляючи її до отриманого виразу і перетворюючи, матимемо

$$[p]L = [pl].$$

Підставляючи до отриманої формули вираз (6.25) отримаємо $[pv] = 0$, що і потрібно було довести.

Залишається обґрунтувати, що з усіх можливих функцій, отриманих в результаті нерівноточних вимірів цю властивіст має тільки загальне арифметичне середнє. Для цього візьмемо відмінну від (6.24) деяку функцію y і запишемо для неї систему рівнянь:

$$v'_i = y - l_i, i = \overline{1,n}. \tag{6.26}$$

Віднімаючи від формули (6.26) вираз (6.24), отримаємо різницю відхилень

$$v'_1 - v_1 = y - L;\ v'_2 - v_2 = y - L; \dots;\ v'_n - v_n = y - L. \tag{6.27}$$

Помножимо кожну з рівностей на відповідні ваги $p_i, i = \overline{1,n}$, а потім підсумуємо почленно і отримаємо формулу $[pv'] - [pv] = [p](y - L)$, яку, враховуючи (6.25), можна перетворити на співвідношення вигляду $[pv'] = [p](y - L)$. Звідси витікає, що $[pv']$ буде дорівнювати нулю, тоді і тільки тоді, коли y=L що і потрібно було довести.

Властивість 5. Сума добутків ваг на квадрати відхилень від загальної арифметичної середини завжди менша суми добутків ваг на квадрати відхилень від будь-якої іншої функції тих же результатів вимірів, тобто

$$[pv^2] = min, \tag{6.28}$$

що відповідає нерівності

$$[pv^2] < [p(v')^2]. \tag{6.29}$$

Для доказу отриманої нерівності перетворимо формулу (6.27) до вигляду

$$v'_1 = v_1 + (y - L);\ v'_2 = v_2 + (y - L); \dots;\ v'_n = v_n + (y - L).$$

Піднесемо ліві і праві частини цієї рівності до квадрату і, привівши їх у відповідність з формулами скороченого множення для многочленів, отримаємо:

$$(v')_1^2 = v_1^2 + 2v_1(y - L) + (y - L)^2;$$
$$(v')_2^2 = v_2^2 + 2v_2(y - L) + (y - L)^2;$$
$$\dots$$
$$(v')_n^2 = v_n^2 + 2v_n(y - L) + (y - L)^2.$$

Потім помножимо ліві і праві частини отриманих рівнянь на відповідні ваги $p_i, i = \overline{1,n}$, отримані вирази почлено складемо. У результаті отримаємо формулу $[p(v')^2] = [pv^2] + 2[pv](y - L) + [p](y - L)^2$, яка з урахуванням рівності (6.25) набере вигляду $[p(v')^2] = [pv^2] + [p](y - L)^2$. Звідки випливає очевидна нерівність (6.29), що і підтверджує справедливість формулювання п'ятої властивості загальної арифметичної середини результатів нерівноточных вимірів.

Таким чином, враховуючи окремі математичні формули знаходження простої арифметичної середини для рівноточних вимірів, розглянуті властивості загальної арифметичної середини однієї з основних характеристик оцінювання точності нерівноточних геодезичних вимірів.

Знання властивостей загальної арифметичної середини дозволяє правильно і коректно організувати математичні обчислення в процесі обробки нерівноточних геодезичних вимірів.

6.4. Формула емпіричної середньої квадратичної похибки одиниці ваги

В основу математичних побудов, що призводять до формального представлення емпіричної середньої квадратичної похибки одиниці ваги вимірів покладемо обґрунтування першої властивості загальної арифметичної середини, а саме формулу (6.20). За аналогією з випадком рівноточних вимірів (див. п.п. 5.3, формула (5.26)) невідомий стандарт вимірів σ_L і стандарт одиниці ваги $\bar{\sigma}$ замінимо середньоквадратичними похибками, отримаємо

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}, \tag{6.30}$$

де M – середня квадратична похибка загальної арифметичної середини μ – середня квадратична похибка одиниці ваги.

Для оцінки точності загальної арифметичної середини окрім ваг необхідно за наслідками вимірів знайти середньоквадратичну похибку одиниці ваги μ.

Для розв'язання поставленого завдання наведемо доведення наступної теореми.

Теорема 6.1. Якщо $v_1, v_2,\ldots, v_n$ відхилення від загальної арифметичної середини, незалежних результатів вимірів, вільних від змінних систематичних похибок, то величина

$$\mu^2 = \frac{[pv^2]}{n-1}, \tag{6.31}$$

є спроможним і незміщеним наближенням до квадрата стандарту (дисперсії) одиниці ваги.

Якщо змінні систематичні похибки відсутні в результатах вимірів, то відповідно до другої властивості вони відсутні і в загальному арифметичному середньому.

Як і у разі доведення теореми (див. п.п. 5.2, формула 5.12) про те, що найймовірніші поправки є дійсне і незміщене наближення до квадрата стандарту і на підставі формул (5.13) і (5.14) отримаємо співвідношення для розрахунку найймовірніших поправок нерівноточних вимірів

$$v_1 = \Delta_L - \Delta_1; 2 = \Delta_L - \Delta_2; \ldots;\ v_n = \Delta_L - \Delta_n,$$

де Δ_L – істинно випадкова похибка арифметичної середини $\Delta_i, i = \overline{1, n}$ – випадкові істинні похибки результатів вимірів.

Перетворимо отриману систему рівнянь наступними методами. По-перше, поміняємо місцями праві і ліві частини кожного з рівнянь, по-друге, піднесемо до квадрата праві і ліві частини рівнянь і, по-третє, перетворимо їх відповідно до формул скороченого множення многочленів. У результаті отримаємо

$$\Delta_1^2 = \Delta_L^2 - 2\Delta_L v_1 + v_1^2;\ \Delta_2^2 = \Delta_L^2 - 2\Delta_L v_2 + v_2^2; \ldots;\ \Delta_n^2 = \Delta_L^2 - 2\Delta_L v_n + v_n^2.$$

Помножимо кожен з цих виразів на відповідну йому вагу $p_i, i = \overline{1,n}$ і почленно їх підсумуємо. Це призводить до наступного формального виразу $[p\Delta^2] = [p]\Delta_L^2 - 2\Delta_L[pv] + [pv^2]$. Враховуючи четверту властивість загальної арифметичної середини, а саме, що $[pv]$=0 і, перетворюючи рівняння, отримаємо

$$[pv^2] = [p\Delta^2] - [p]\Delta_L^2,$$

Помножимо ліву і праву частини рівняння на $\frac{n}{n(n-1)}$ отримаємо

$$\frac{[pv^2]}{n-1} = \frac{n}{n-1}\left\{\frac{[p\Delta^2]}{n} - \frac{[p]}{n}\Delta_L^2\right\}, \tag{6.32}$$

і перейдемо до границі за $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[pv^2]}{n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-1}\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{[p\Delta^2]}{n} - \lim_{n\to\infty}\frac{[p]}{n}\lim_{n\to\infty}\Delta_L^2\right\}. \tag{6.33}$$

Розглянемо границі правої частини виразу (6.33).

1. При доведенні теореми в п.п. 5.2 вже показано, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-1} = 1.$$

2. Для дослідження границі $\lim_{n\to\infty}\frac{[p\Delta^2]}{n}$ помножимо результати вимірів на корені квадратні з їх вагів $l'_i = l_i\sqrt{p_i}, i = \overline{1,n}$. Величини l'_i відповідно до (6.7) мають ваги, рівні одиниці, отже, їх можна розглядати як результати рівноточних вимірів, а їх випадкові похибки $\Delta'_1 = \Delta_1\sqrt{p_1}, \Delta'_2 = \Delta_2\sqrt{p_2}, \ldots, \Delta'_n = \Delta_n\sqrt{p_n}$ мають стандарт, що дорівнює стандарту одиниці ваги $\bar{\sigma}$. Тому на підставі властивості розсіювання випадкових похибок (2.14) можемо записати

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[p\Delta^2]}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{[(\Delta')^2]}{n} = \bar{\sigma}^2. \tag{6.34}$$

3. Визначимо, чому дорівнює границя $\lim_{n\to\infty}\frac{|p|}{n}$. Враховуючи обмежувальні умови на ваги, які розглядалися в п.п.6.3, а саме $c_1 \le p_i \le c_2, i = \overline{1,n},$ має місце нерівність $p_i \le c_2$. Підсумуємо ці нерівності від p_i до p_n отримаємо $[p]\le nc_2$. Розділивши ліву і праву частини отриманої нерівності на n і переходячи до границі, знайдемо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[p]}{n} < c_2. \qquad (6.35)$$

4. На підставі третьої властивості загальної арифметичної середини можна підсумувати, що

$$\lim_{n\to\infty}\Delta_L = 0. \qquad (6.36)$$

Підставляючи границі (6.34), (6.35) і (6.36) до виразу (6.33) і зважаючи на обмеженість величини (6.35), переходимо до межі

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[pv^2]}{n-1} = \overline{\sigma}^2, \qquad (6.37)$$

що і доводить спроможність оцінки (6.31). Перша частина теореми доведена.

Для доказу незміщеності оцінки (6.31) припустимо, що є t рядів результатів незалежних нерівноточних вимірів:

$$l_1', l_2', \dots, l_n''; \; l_1'', l_2'', \dots, l_n''; \; l_1^{(t)}, l_2^{(t)}, \dots, l_n^{(t)}$$

з вагами $p_1, p_2, \dots, p_n$. Тоді цей доказ зводиться до доказу незміщеності оцінки

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\mu^2]}{t} = \overline{\sigma}^2, \qquad (6.38)$$

де $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_t$ – величини, обчислені за формулою (6.31) для кожного з наведених вище рядів вимірів. На підставі формул (6.31) і (6.32) запишемо

$$[\mu^2] = \frac{n}{n-1}\left\{\frac{[p\Delta^2]}{n} - \frac{[p]}{n}\sum_{i=1}^{t}\Delta_L^2\right\}.$$

Розділимо цей вираз почлено на t і перейдемо до межі $t\to\infty$ матимемо рівняння

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\mu^2]}{t} = \frac{n}{n-1}\left\{\sum_{t\to\infty}^{t}\frac{[p\Delta^2]}{nt} - \frac{[p]}{n}\lim_{t\to\infty}\frac{\sum_{i\to\infty}^{t}\Delta_L^2}{t}\right\}. \qquad (6.39)$$

Розглянемо границі в правій частині отриманого виразу. Відповідно до формули (6.34)

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\sum[p\Delta^2]}{nt} = \overline{\sigma}^2.$$

Позначимо $\Delta_{L1}, \Delta_{L2}, \dots, \Delta_{Lt}$ – випадкові похибки загальних арифметичних середніх, а $L', L'', \dots, L^{(t)}$ випадкові похибки рівноточних величин, що мають одну і ту саму вагу $[p]$. На підставі властивості розсіювання випадкових похибок (2.14) приймаємо

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\sum \Delta_L^2}{t}=\overline{\sigma}_L^2.$$

Підставимо ці границі до виразу (6.39), отримаємо формулу

$$\lim_{t\to\infty}\frac{[\mu^2]}{t}=\frac{n}{n-1}\left\{\overline{\sigma}^2-\frac{[p]}{n}\sigma_L^2\right\}.$$

Замінимо $\sigma^2{}_L$ її значенням з (6.20) і проведемо необхідні перетворення. У результаті отримаємо

$$\lim_{t\to\infty}\frac{[\mu^2]}{t}=\frac{n}{n-1}\left\{\frac{(n-1)}{n}\overline{\sigma}^2\right\}=\overline{\sigma}^2,$$

що і доводить незміщеність оцінки (6.31), яку називають **емпіричною середньою квадратичною похибкою одиниці ваги**. Доведена друга частина теореми.

Надійність величини, обчисленої за формулою (6.31), як і у разі рівноточних вимірів, може бути оцінена за допомогою наближеної формули

$$m_\mu=\frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}}. \tag{6.40}$$

На підставі формули (6.37) дійдемо висновку, що якщо відомі істинні випадкові похибки ряду нерівноточних вимірів однієї і тієї ж величини, середня квадратична похибка одиниці ваги може бути обчислена за формулою

$$\mu=\sqrt{\frac{[p\Delta^2]}{n}}, \tag{6.41}$$

а її надійність оцінена за наближеною формулою:

$$m_\mu=\frac{\mu}{\sqrt{2n}}. \tag{6.42}$$

Таким чином, на основі доведення теореми отримана формула для розрахунку однієї з точностних характеристик нерівноточних вимірів – емпіричної середньої квадратичної похибки одиниці ваги.

6.5. Послідовність математичної обробки ряду нерівноточних вимірів однієї і тієї ж величини

За аналогією з організацією послідовності математичної обробки ряду рівноточних вимірів (див. п.п. 5.3) задамо послідовність математичних процедур для ряду нерівноточних вимірів однієї і тієї ж величини.

Процедура 1. Обчислення вагів результатів вимірів. Залежно від конкретних умов вимірювання використовується один із виразів:

- формула (6.1), коли стандарти результатів вимірів відомі і можуть бути визначені теоретично;

- формула (6.9), коли стандарти невідомі;

- формула (6.10) у разі рівності стандартів (див. приклад 6.1 в п.п.6.2);

- формула (6.13) у разі лінійних вимірів і відсутності систематичних похибок (див. приклад 6.2 в п.п. 6.2);

- формула (6.14) у разі вимірів перевищення, нівелірного ходу, прокладеного у рівнинній місцевості (6.15), (див. приклад 6.3 в п.п. 6.2).

Процедура 2. Обчислення загальної арифметичної середини за формулою (6.17) і найймовірніших поправок за формулою $v_i = L - l_i, i = \overline{1, n}$.

Особливістю процедури є те, що обчислення переважно виконуються з округленнями, замість L приймаємо її наближене значення L' а замість поправок v_i – їх зміщені величини $v'_i, i = \overline{1, n}$.

Процедура 3. Контрольна перевірка правильності обчислення найймовірніших поправок, яка здійснюється з використанням формули

$$[pv'] = [p](L' - L). \tag{6.43}$$

Процедура 4. Обчислення зсуненого значення суми $[pv^2]$. Для цього застосовується формула $[p(v')^2] = [pv^2] + [p](L' - L)^2$ яка отримана при доказі п'ятої властивості загальної арифметичної середини. Перетворюючи цей вираз знаходимо

$$[pv^2] = [p(v')^2] - [p](L' - L)^2. \tag{6.44}$$

Процедура 5. Контроль правильності обчислення за формулою (6.44), який здійснюється шляхом розрахунку цієї ж величини, але за іншою формулою

$$[pv^2] = [p(v')^2] - \frac{[pv']^2}{[p]}.$$

Якщо результати обчислення однакові, то виконується наступна процедура.

Процедура 6. Обчислення середньоквадратичної похибки одиниці ваги μ шляхом підстановки значення $[pv^2]$ до формули (6.31).

Процедура 7. Оцінка надійності отриманого результату з використанням формули (6.40).

Процедура 8. Обчислення середньої квадратичної похибки загальної арифметичної середини M за формулою (6.30).

Процедура 9. Оцінка надійності отриманого результату з використанням формули

$$m_M = \frac{m_\mu}{\sqrt{[p]}}. \tag{6.45}$$

Таким чином, розглянуті особливості нерівноточних вимірів і на цій підставі наведена послідовність математичних процедур їх обробки.

Додаткові джерела інформації

1. Бурмистров, Г.А. Теория математической обработки геодезических измерений [Текст]: пособие / Г.А. Бурмистров, В.Д.Большаков. – М.: Недра, 1969. – 400 с.
2. Войславский, Л.К. Теория математической обработки геодезических измерений. Часть 1. Теория погрешностей измерений [Текст] учебно-методическое пособие (для студентов 2 курса дневной формы обучения спец. 7.070908 «Геоинформационные системы и технологии») / Л.К. Войславский. – Х.: ХНАГХ, 2006. – 64 с.
3. Зазуляк, П.М. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірів [Текст] навчальний посібник / П.М. Зазуляк, В.І. Гавриш, Е.М. Євсєєва, М.Д. Йосипчук. – Львів: Видавництво «Растр-7», 2007. – 408 с.
4. Кемниц, Ю.В. Теория ошибок измерений [Текст] / Ю.В.Кемниц. – М.: Недра, 1962. – 175 с.

7. ПОДВІЙНІ ВИМІРИ

7.1. Загальні положення

У геодезичній практиці прийнято кожну фізичну величину вимірювати незалежно не менше двох разів, оскільки при одному вимірі неможливо здійснити контроль його правильності. Так, горизонтальний кут вимірюється в положеннях труби теодоліта «круг право» і «круг ліво», лінії вимірюють двічі – в прямому і зворотному напрямі, при геометричному нівелюванні перевищення на станції визначають за чорним і червоним боками рейки, у тригонометричному нівелюванні перевищення визначається в прямому і зворотному напрямі, при нівелюванні II і III класу нівелірний хід прокладають в прямому і зворотному напрямі. Такого роду пари вимірів отримали назву **подвійні виміри**.

У кожній парі подвійних вимірів має місце різниця

$$d_i = l'_i - l''_i, i = \overline{1,n}, \tag{7.1}$$

де l'_i, l''_i – результати двох вимірів одного і того ж об'єкту.

Сукупності різниць d_i при достатньо великій їх кількості дають можливість оцінювати точність вимірів, а у ряді випадків виявляти систематичні похибки.

Зробимо припущення, що з п'яти чинників, розглянутих нами в п.п. 2.3, різниці d_i залежать від виконавця, приладу, методу вимірювання і абсолютно не залежать від об'єкта вимірювання. Тому оцінка точності за різницями подвійних вимірів може виявитися завищеною, оскільки не враховує похибки центрування теодоліта і установки візирних цілей при вимірюванні горизонтальних кутів, осідання башмаків або кілків при геометричному нівелюванні та інші зовнішні чинники.

З цієї причини оцінку точності за різницями подвійних вимірів іноді називають **оцінкою точності за внутрішньою збіжністю**.

7.2. Оцінка точності за різницями подвійних рівноточних вимірів

За відсутності систематичних похибок на підставі того, що за похибку вимірів приймають різницю між результатом виміру і істинним його значенням можна записати

$$l'_i = X + \Delta'_i, l''_i = X + \Delta''_i, i = \overline{1,n}, \quad (7.2)$$

де X – істинне значення вимірюваної величини; Δ_i', Δ_i'' – випадкові похибки результатів вимірів.

Підставляючи вирази (7.2) до формули (7.1) і здійснюючи відповідні перетворення, отримаємо

$$l'_i - l''_i = \Delta'_i - \Delta''_i = d_i, i = \overline{1,n}, \quad (7.3)$$

З отриманого результату випливає, що різниці d_i є істинними похибкам подвійних вимірів. Тому, якщо є ряд подвійних вимірів однієї і тієї ж фізичної величини $l'_1, l'_2,\ldots, l'_i,\ldots, l'_n$; $l''_1, l''_2,\ldots, l''_i,\ldots, l''_n$; $i = \overline{1,n}$, де n – кількість результатів в першій і другій серіях вимірів. Тоді справедливі різниці $l'_1 - l''_1 = d_1$; $l'_2 - l''_2 = d_2$;…; $l'_n - l''_n = d_n$.

Середню квадратичну похибку цих різниць із урахуванням співвідношення (3.6) можна обчислити використовуючи вираз

$$m_d = \sqrt{\frac{[d^2]}{n}}. \quad (7.4)$$

Якщо припустити, що m – середня квадратична похибка окремого точкового результату виміру, а також, що за $n \to \infty$ середню квадратичну похибку приблизно можна прирівняти до стандарту σ (див. формулу 4.21), то можна записати $m_d = m\sqrt{2}$ або зробивши елементарні перетворення отримаємо

$$m = \frac{m_d}{\sqrt{2}}. \tag{7.5}$$

Підставляючи значення m_d з формули (7.5) до формули (7.4), отримаємо формулу для обчислення середньої квадратичної похибки за різницями подвійних вимірів:

$$m = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}, \tag{7.6}$$

а для середнього з двох серії вимірів $l_i = \frac{1}{2}(l'_i + l''_i)$ на підставі властивості *1* простої арифметичної середини (див. формулу (5.2)) отримаємо наступне співвідношення

$$M = \frac{m}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[d^2]}{4n}}. \tag{7.7}$$

При відносно невеликій кількості вимірів n в кожній серії надійність оцінок, отриманих на основі формул (7.6) і (7.7) можна визначити за формулою $m_m = \frac{m_{m_d}}{\sqrt{2}} = \frac{m_d}{\sqrt{2n} \cdot \sqrt{2}}$ або, враховуючи вираз (7.4) і (7.5), перетворити її на формулу вигляду

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}}. \tag{7.8}$$

Далі обчислимо середню квадратичну похибку простої арифметичної середини двох серій вимірів за формулою

$$m_M = \frac{m_m}{\sqrt{2}} = \frac{m}{\sqrt{2n} \cdot \sqrt{2}}$$

або, підставляючи значення m з формули (7.7), отримаємо

$$m_M = \frac{M}{\sqrt{2n}}. \tag{7.9}$$

Розглянутий спосіб оцінки точності за різницями подвійних вимірів застосовується тоді, коли різниці d_i у певному ряді результатів вимірів не містять систематичних похибок.

Для виявлення у ряді результатів подвійних вимірів систематичної похибки скористаємося властивістю компенсації випадкових похибок (1.10). За відсутності систематичної похибки величина $\frac{[d_i]}{n}, i = \overline{1,n}$ повинна наближатися до нуля. Інакше можна вважати, що на процес вимірів мали вплив деякі випадкові чинники або різниці d_i містять систематичні похибки θ_d.

Для виявлення факту наявності в результатах вимірів систематичних похибок як робочу гіпотезу приймемо, що різниця подвійних вимірів містить середню систематичну похибку

$$\theta_d > \frac{[d]}{n}.$$

Виключимо цю величину з кожної різниці d_i і формально запишемо

$$\partial_1 = d_1 - \theta_d;\ \partial_2 = d_2 - \theta_d; \dots;\ \partial_n = d_n - \theta_d. \tag{7.10}$$

Тоді, підставляючи до формули (7.5) формулу (7.4), а до неї отримані результати – вирази (7.10), отримаємо формулу для обчислення кількісних значень емпіричної середньої квадратичної похибки

$$m = \sqrt{\frac{[\partial^2]}{2(n-1)}}. \tag{7.11}$$

Враховуючи величину граничної похибки (див. формулу (3.10)), прийнятої в геодезії, а також формулу (7.11), можна скласти наступну нерівність

$$|\theta_d| = \frac{2m}{\sqrt{n}}, \tag{7.12}$$

при розв’язанні, якої приходимо до висновку, що різниці d_i містять систематичну похибку θ_d. Інакше величина $\frac{[d_i]}{n}$ є наслідком різних випадкових чинників. Розглянемо приклад.

Приклад 7.1. У результаті вимірювання перевищень при двох горизонтах приладу на суміжних станціях за однакових відстаней від інструменту до рейок отримані результати вимірів, які приведені в табл.7.1. Необхідно визначити точність вимірів і їх надійність.

Таблиця 7.1 – Результати вимірювання перевищень

№ станції	h_1**, м**	h_2**, м**	d**, мм**
1	-0,479	-0,480	+1
2	-0.292	-0.289	-3
3	-0.207	-0.209	+2
4	-0.175	-0.172	-3
5	-0.102	-0.102	0
6	+0.066	+0.065	+1
7	+0.124	+0.120	+4
8	+0.190	+0.188	+2
9	+0.268	+0.271	-3
10	+0.303	+0.305	-2

Визначимо середню різницю виміряних величин

$$\frac{[d]}{n} = \frac{1 + (-3) + 2 + (-3) + 0 + 1 + 4 + 2 + (-3) + (-2)}{10} = -0{,}1 \text{ мм.}$$

Отримана величина набагато менше граничної похибки округлення відліку 0,5 мм, так що припускати наявність в результатах розрахунку різниці d_i систематичної похибки немає ніяких підстав.

За формулою (7.6) знайдемо середню квадратичну похибку виміряного перевищення

$$m = \sqrt{\frac{[\mathrm{d}^2]}{2\mathrm{n}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1^2 + (-3)^2 + 2^2 + (-3)^2 + 0^2 + 1^2 + 4^2 + 2^2 + (-3)^2 + (-2)^2}{2 \cdot 10}} =$$

$$= \sqrt{\frac{57}{20}} = 1{,}7 \text{ мм.}$$

Середню квадратичну похибку відліку по рейці на підставі (4.21) визначимо з виразу

$$m_u = \frac{m_h}{\sqrt{2}} = \frac{1{,}7}{\sqrt{2}} = 1.2 \text{ мм.}$$

Середню квадратичну похибку середнього перевищення обчислимо використовуючи формулу (5.26) і підставляючи до неї значення m_u.

$$M = \frac{m_u}{\sqrt{n}} = \frac{1,2}{\sqrt{10}} = 0,4 \text{ мм.}$$

Визначимо надійність оцінювання середньої квадратичної похибки відліку по рейці m_u використовуючи формулу (7.8)

$$m_{m_h} = \frac{m_h}{\sqrt{2n}} = \frac{1,7}{\sqrt{20}} = 0,4 \text{ мм}$$

і надійність оцінювання середньої квадратичної похибки середнього перевищення M за формулою (7.9)

$$m_M = \frac{M}{\sqrt{2n}} = \frac{0,38}{\sqrt{20}} = 0,1 \text{ мм.}$$

Порівнюючи показники точності вимірів і їх надійності, можна стверджувати, що виміри виконані достатньо точно і отриманим результатам можна довіряти. Розглянемо ще один приклад оцінювання точності і надійності подвійних рівноточних вимірів.

Приклад 7.2. Досліджуються результати подвійних рівноточних вимірів, а саме результати зсуву шкал червоного боку пари рейок, які приведені в табл. 7.2. Аналіз результатів вимірів, приведених у табл. 7.2 показує, що вони мають один знак. Цей факт є ознакою наявності у вимірюваннях систематичного зсунення (похибки). Знайдемо величину цього зсунення за формулою:

$$\theta_d = \frac{[d]}{n} = \frac{32}{8} = 4 \text{ мм.}$$

Таблиця 7.2 – Результати подвійних рівноточних вимірів

№ точок	Відліки		Різниця d, мм	∂, мм
	Рейка №1	Рейка №2		
1	5150	5146	+4	0
2	5200	5194	+6	+2
3	5277	5273	+4	0
4	5379	5375	+4	0
5	5196	5194	+2	-3
6	5245	5242	+3	-1
7	5325	5322	+3	-1
8	5426	5420	+6	+2

Обчислимо різниці $\partial_i = d - \theta, i = \overline{1{,}8}$. Результати обчислень занесені до відповідного стовпця табл. 7.2. Скористаємося формулою (7.11) для обчислення емпіричної середньої квадратичної похибки відліку по рейці, отримаємо

$$m_u = \sqrt{\frac{[\partial^2]}{2(n-1)}} = \sqrt{\frac{19}{14}} = 1{,}2 \text{ мм.}$$

Для того, щоб переконатися, що результати вимірів мають систематичну похибку, скористаємося нерівністю (7.12) і, підставивши до неї набутих значень, отримаємо

$$4 > \frac{2 \cdot 1{,}2}{\sqrt{8}} = 0.8 \text{ мм.}$$

Результат показує наявність у вимірюваннях систематичної похибки. За формулою (7.8) оцінимо надійність значення m_u

$$m_{m_u} = \frac{m_u}{\sqrt{2n}} = 0.3 \text{ мм.}$$

Проведене дослідження дозволяє зробити висновок, що червона шкала рейки №1 зміщена відносно рейки №2 на +4 мм. Тому необхідно або замінити одну з рейок в комплекті, або враховувати це зсунення при обчисленні перевищення за червоним боком рейки.

7.3. Оцінка точності за різницями подвійних нерівноточних вимірів

Розглянемо *n* пар подвійних нерівноточних вимірів об'єктів однакового роду. Формально запишемо

$$(l'_1, l''_1) \in p_1; \quad (l'_2, l''_2) \in p_2; \dots; \ (l'_n, l''_n) \in p_n, \tag{7.13}$$

де знак «∈» позначає приналежність ваги $p_i, i = \overline{1,n}$, до кожного вимірювання виділених пар. При цьому в кожній парі вимірювання рівноточні.

Така ситуація має місце при порівнянні результатів лінійних вимірів полігонометричних (теодолітних) ходів, де лінії мають різну довжину, або при порівнянні результатів подвійного нівелювання у ходах різної довжини.

Складемо для кожної пари (7.13) різниці

$$(l'_1 - l''_1) = d_1; \quad (l'_2 - l''_2) = d_2; \quad (l'_n - l''_n) = d_n, \tag{7.14}$$

які є істинними похибками.

Для ваги різниці $d_i, \ i = \overline{1,n}$ запишемо вираз із урахуванням основної теореми теорії похибок і формули (6.6)

$$\frac{1}{p_{d_i}} = \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i} = \frac{2}{p_i}.$$

Здійснюючи нескладні перетворення отриманої формули, знайдемо вагу різниці кожного вимірювання

$$p_{d_i} = \frac{p_i}{2}. \tag{7.15}$$

Визначимо середню квадратичну похибку одиниці ваги, скориставшись при цьому виразом (6.41) і підставивши в нього вираз (7.15), отримаємо формулу

$$\mu = \sqrt{\frac{\frac{p_1}{2} \cdot d_1^2 + \frac{p_2}{2} \cdot d_2^2 + \cdots + \frac{p_n}{2} \cdot d_n^2}{n}},$$

або спрощуючи її, маємо

$$\mu = \sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}}. \tag{7.16}$$

Відповідно середня квадратична похибка результату одного вимірювання з вагою p_i визначається на підставі (6.8) шляхом заміни в цій формулі стандарту одиниці ваги $\bar{\sigma}$ на середню квадратичну похибку одиниці ваги μ. Тоді отримаємо

$$m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{7.17}$$

Середня квадратична похибка арифметичної середини по кожній парі (7.14) обчислюється за формулою

$$M_i = \frac{\mu}{\sqrt{2p_i}}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{7.18}$$

Надійність оцінок μ і m_i:

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2n}}; \tag{7.19}$$

$$m_{m_i} = \frac{m_i}{\sqrt{2n}}; \tag{7.20}$$

$$m_{M_i} = \frac{M_i}{\sqrt{2n}}. \tag{7.21}$$

Формули (7.16 – 7.21) справедливі, якщо різниці d_i не містять істотних систематичних похибок. За наявності систематичних похибок визначають коефіцієнт систематичного впливу, який обчислюється за формулою

$$\lambda_l = \frac{[d]}{[l]}\ , \tag{7.22}$$

де l – довжини вимірюваних ліній для лінійних вимірів і

$$\lambda_L = \frac{[d]}{[L]}\ , \tag{7.23}$$

де L – довжина ходу подвійного нівелювання.

Знайдемо співвідношення, за допомогою яких можна було б обчислити поправки з урахуванням коефіцієнтів систематичного впливу λ_l і λ_L, $\partial_i = d_i - \lambda_l \cdot l$для лінійних вимірів і $\partial_i = d_i - \lambda_L \cdot L$ для подвійного нівелювання.

З урахуванням поправок обчислимо середню квадратичну похибку одиниці ваги за формулою

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\partial^2]}{2(n-1)}}\ . \tag{7.24}$$

Для оцінювання надійності середньої квадратичної похибки скористаємося формулою (6.40), підставляючи в неї формулу (7.24).

Середня квадратична похибка виміряної довжини лінії або нівелірного ходу з урахуванням формули (7.24) розраховується за формулою

$$m_i = \mu\sqrt{L}\,, \tag{7.25}$$

а середнє перевищення по ходу розраховується відповідно до виразу

$$M_i = \frac{m_i}{\sqrt{2}} = \frac{\mu}{\sqrt{2p}}\ . \tag{7.26}$$

Надійність оцінок точності вимірів (7.25) і (7.26) визначимо за формулами (7.20) та (7.21). Приведемо приклад оцінювання точності подвійних вимірів.

Приклад 7.3. Необхідно оцінити точність результатів подвійного нівелювання 10 ходів, які представлені в табл. 7.3.

Підсумуємо значення другого і третього стовпців табл.7.3, отримаємо $[d]$=163,0 і $[L]$=55,0. За формулою (7.23) обчислимо коефіцієнт систематичного впливу на вимірювання:

$$\lambda_L = \frac{[d]}{[L]} = 2.96\ \frac{мм}{км}\,.$$

Для обчислення різниць $\partial_i, \ i = \overline{1{,}10}$ необхідно обчислити добутки $\lambda_L L$ і їх значення, з урахуванням знаку, занести до 4-го стовпця табл. 7.3. Сума цих добутків дорівнює $[-\lambda L]$=163,1.

Таблиця 7.3 – Результати подвійної нівелювання

№ ходів	**Різниця d, мм**	**Довжина на ходу L, км.**	**$-\lambda L$, мм**	**∂, мм**	**∂^2**	**$p\partial^2$**	**m_i, мм**	**M_i, мм**
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	54.2	2.6	-7.7	46.5	2162.2	831.6	20.5	14.5
2	54.3	8.2	-24.3	30.0	900.0	109.8	36.4	25.7
3	44.0	7.7	-22.8	21.2	449.4	58.4	35.2	24.9
4	-13.4	8.7	-25.8	-39.2	1536.6	176.6	37.5	26.5
5	-2.9	6.2	-18.4	-21.3	453.7	73.2	31.6	22.3
6	54.3	3.5	-10.4	43.9	1927.2	550.6	23.8	16.8
7	32.3	2.3	-6.8	25.5	650.2	282.7	19.3	13.6
8	-5.5	6.7	-19.9	-25.4	645.2	96.3	32.9	23.3
9	-24.8	3.1	-9.2	-34.0	1156	372.9	22.4	15.8
10	-29.5	6.0	-17.8	47.3	2237.3	372.8	31.1	22.0
	$[d]$=163,0	$[L]$=55,0						

Відомі значення підставимо до формули $\partial_i = d_i - \lambda_L \cdot L_i$, що враховує поправку, яка компенсує систематичні похибки кожного ходу подвійного нівелювання. Результати обчислення величин ∂_i умістимо до 5-ого стовпця табл.7.3.

Розрахуємо поправку ∂^*, яка враховує як коефіцієнти систематичного впливу для окремо узятого вимірювання, так і довжини ходу для подвійного нівелювання. Цю поправку обчислимо спочатку перетворивши формулу (7.23) до вигляду [d]= $\lambda_L[L]$, а потім підставляючи відоме значення $[-\lambda L]$ і обчислене значення $\lambda_L[L]$=163,2 до формули $\partial^* = \lambda_L[L] - [\lambda L]$, отримаємо ∂^* =0,1.

Зважаючи на формулу (6.14) для обчислення ваги перевищення нівелірного ходу розрахуємо $p_i = \frac{1}{L_i}$ для нашого випадку і отримані ваги помножимо на квадрати різниць ∂^2. Результати занесемо до 7-го стовпця табл.7.3. Підсумуємо отримані результати відповідно до формули $[\partial^2]$=2924,9.

Показники оцінки точності результатів вимірів

Обчислимо середню квадратичну похибку одиниці ваги, яку вважають показником оцінки точності результатів вимірів. Для цього у формулу (7.24) підставимо відомі чисельні значення, отримаємо

$$\mu = \sqrt{\frac{2924.9}{2(10-1)}} = 12.7\ \frac{мм}{км}.$$

Обчислимо середню квадратичну похибку виміряних довжин ліній або нівелірного ходу для кожного з ходів за формулою (7.27), а результати занесемо до 8-го стовпця табл.7.3

$$m_i = \mu\sqrt{L_i} \tag{7.27}$$

Обчислимо середнє перевищення по ходу враховуючи формулу (7.26) та (6.15) і приводячи їх до вигляду

$$M_i = \mu\sqrt{\frac{L_i}{2}} = \frac{m_i}{\sqrt{2}}. \tag{7.28}$$

Показники оцінювання надійності результатів вимірів

Надійність значення показника μ оцінимо з використанням формули (7.19)

$$m_\mu = \frac{12.7}{\sqrt{20}} = 2.8\ \text{мм}\,.$$

Надійність значень показника m_i оцінимо з використанням формули (7.20) підставляючи до неї результати обчислень (див. 8-й стовпець табл.7.3), отримаємо

$$m_{m_1} = \frac{m_1}{\sqrt{2n}} = \frac{20.5}{\sqrt{20}} = 4.58;\ m_{m_2} = \frac{m_2}{\sqrt{2n}} = \frac{36.4}{\sqrt{20}} = 8.14; \ldots;$$

$$m_{m_{10}} = \frac{m_{10}}{\sqrt{2n}} = \frac{31.1}{\sqrt{20}} = 6.95\,.$$

Надійність значень показника M_i оцінимо з використанням формули (7.21), підставивши до неї результати обчислень (див. 9-й стовпець табл.7.3), отримаємо

$$m_{M_1} = \frac{M_1}{\sqrt{2n}} = \frac{14.5}{\sqrt{20}} = 3.24;\ \ m_{M_2} = \frac{M_2}{\sqrt{2n}} = \frac{25.7}{\sqrt{20}} = 5.74; \ldots;$$

$$m_{M_{10}} = \frac{M_{10}}{\sqrt{2n}} = \frac{22.0}{\sqrt{20}} = 4.91\,.$$

Узагальнимо отримані в процесі математичної обробки результати. З урахуванням виключення систематичної похибки середня квадратична похибка одиниці ваги подвійних вимірів склала 12,7 мм/км., що при сумарному значенні довжин ходів $[L]$=55,0 км. складає незначну величину. У цьому випадку можна стверджувати, що подвійні вимірювання проведені з достатньою точністю.

Решта показників m_i і M_i характеризують точність подвійних вимірів кожного ходу. Аналіз 8-го і 9-го стовпців табл. 7.3 показують, що найбільш грубий результат отриманий при вимірюванні 4 ходу. Порівнюючи показники точності оцінок і їх надійності, можна стверджувати про достатньо високу точність вимірів і їх надійність.

Таким чином, розглянуті загальні положення і особливості подвійних вимірів. На цій основі розглянуті процедури і показники оцінювання точності за різницями подвійних рівноточних і нерівноточних вимірів. Показано, що оцінка надійності є складовою частиною оцінювання точності результатів вимірювання. Приклади, розглянуті у цьому розділі сприяють кращому засвоєнню логіки математичних перетворень.

Додаткові джерела інформації

1. Бурмистров, Г.А. Теория математической обработки геодезических измерений [Текст]: пособие / Г.А. Бурмистров, В.Д.Большаков. – М.: Недра, 1969. – 400 с.
2. Войславский, Л.К. Теория математической обработки геодезических измерений. Часть 1. Теория погрешностей измерений [Текст] учебно-методическое пособие (для студентов 2 курса дневной формы обучения спец. 7.070908 «Геоинформационные системы и технологии») / Л.К. Войславский. – Х.: ХНАГХ, 2006. – 64 с.
3. Зазуляк, П.М. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірів [Текст] навчальний посібник / П.М. Зазуляк, В.І. Гавриш, Е.М. Євсєєва, М.Д. Йосипчук. – Львів: Видавництво «Растр-7», 2007. – 408 с.
4. Кемниц, Ю.В. Теория ошибок измерений [Текст] / Ю.В.Кемниц. – М.: Недра, 1962. – 175 с.

8. КОРОТКІ ВІДОМОСТІ ПРО ЗАЛЕЖНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ І ЗАЛЕЖНІ ПОХИБКИ

8.1. Види залежностей

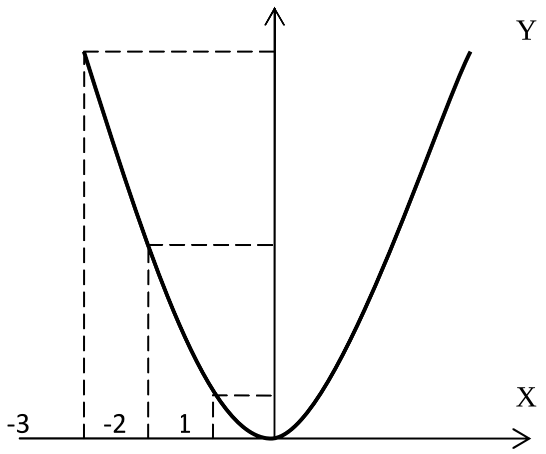
На процес геодезичних вимірів, як показано в п.п. 2.3, має вплив безліч взаємопов'язаних між собою чинників. Тому результати вимірів і їх похибки переважно представляються випадковими величинами, які мають між собою певну залежність. Наприклад, результати вимірів довжини і похибки вимірів залежать від температури і вологості навколишнього середовища, результати вимірювання кутів перевищення залежить від точності використаного приладу і так далі

У математичній статистиці виділяють три основні залежності між парами двох випадкових величин *x* і *y*.

1. Функціональна залежність

Чітка функціональна залежність між випадковими похибками в геодезичній практиці присутня рідко. Це пов'язано з тим, що обидві величини або одна з них схильні до дії випадкових чинників. Більш того, серед цих чинників можуть бути і загальні, тобто що впливають і на *x*, і на *y*.

Це залежність, за якою значенню *x* відповідає одне значення *y*. Така залежність може бути виражена у вигляді функції $y = f(x)$, представленою у вигляді графіка або таблиці. Так, наприклад, функція $y = x^2$ може бути представлена у вигляді параболи або у вигляді таблиці (див. рис. 8.1).



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Рис. 8.1 – Функціональна залежність $y = x^2$

2. Стохастична залежність

При стохастичній залежності, яка має місце тільки для випадкових величин, у тому числі і для випадкових похибок, одному значенню *x* може відповідати декілька або жодного значення *y*. Така залежність може бути виражена тільки у вигляді таблиці або графіка (див. рис. 8.2). Тут ілюструється, так звана емпірична залежність, яка на малюнку показана сукупністю точок, тобто результатів вимірів. Лінією на рисунку показана теоретична залежність, отримана в результаті математичної обробки емпіричної залежності.

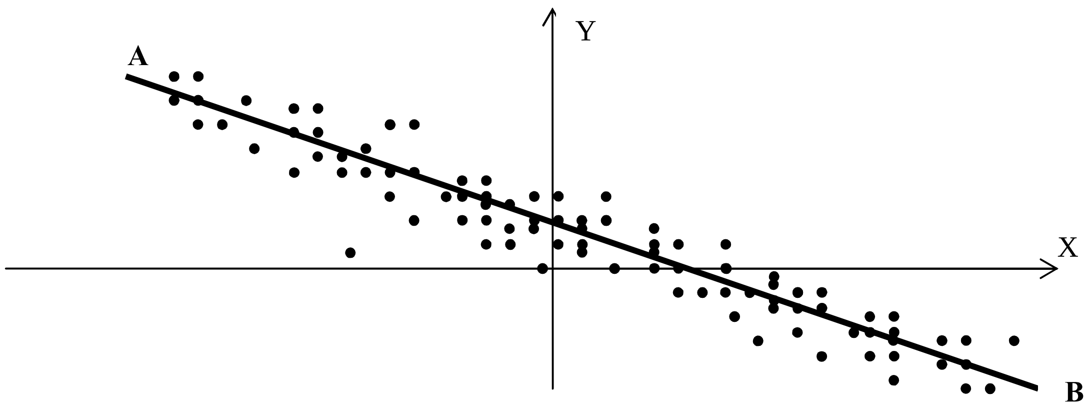


Рис. 8.2 – Емпірична і теоретична залежності результатів вимірювання фізичної величини

На рис. 8.2 наочно показано, що результати вимірів розташовані вузькою смугою вздовж лінії *AB* і мають лінійний стохастичний (випадковий) характер.

Приклад 8.1. Відстань *D* виміряна двома групами фахівців. Першу групу склали фахівці, що мають великий досвід геодезичних робіт, які проводили вимірювання високоточними приладами. Друга група складалася із студентів, що проходять практику геодезичних вимірів з приладами невисокої точності.

Результати вимірів і залежності їх від похибок показані на рис.8.3. Видно, що розкид емпіричних значень у другій групі більший, ніж у першій групі. Тому, як математичний апарат для оцінювання точності вимірів залежних випадкових величин, використовують кореляційний і регресійний аналіз.

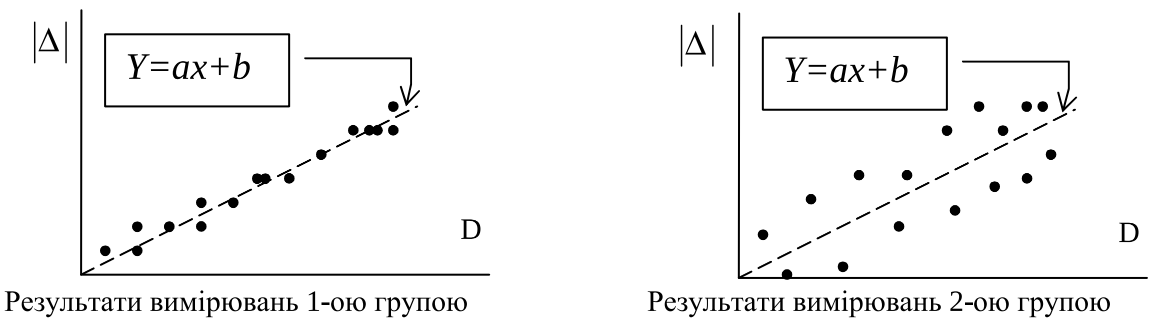


Рис. 8.3 – Корелограми і прямі регресії

Існують і складніші стохастичні залежності, коли точки групуються вздовж вузької смуги, що нагадує криву. Однак вони тут розглядатися не будуть. Відзначимо тільки, що багато нелінійних залежностей можна перетворити на лінійні.

3. Відсутність залежності

Має місце тільки для випадкових величин, середніх і випадкові похибки. Як і у разі стохастичної залежності, таку множину можна представити у вигляді таблиці або показати графічно (див. рис.8.4).

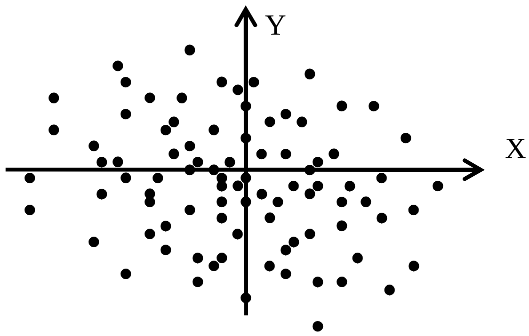


Рис. 8.4 – Ілюстрація відсутності залежності між результатами вимірів

Основною ознакою, підтверджуючою відсутність залежності, є границя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[xy]}{n} = 0. \tag{8.1}$$

Окремим випадком границі (8.1) є властивість незалежності випадкових похибок, представлена границею (1.12).

8.2. Кількісні характеристики лінійної стохастичної залежності

Лінійна стохастична залежність не може бути точно виражена функціональною залежністю, наприклад, у вигляді параболи, зображеної на рис.8.1, або іншими чіткими залежностями – логарифмічною, показниковою і так далі. Разом з тим, існують кількісні характеристики, що точно описують взаємозалежність між величинами x і y. Вивченням кількісних характеристик, що описують залежність зв'язків між випадковими величинами займається теорія кореляції.

Кореляція – статистичний взаємозв'язок двох або декількох випадкових величин (або величин, які можна з деякою припустимою мірою точності вважати такими). При цьому, зміни однієї або декількох з цих величин призводять до систематичної зміни іншої або інших величин.

Однією з характеристик оцінки тісноти зв'язку за дослідними (апостеріорними) даними величин x і y є кореляційний момент

$$k = \frac{[xy]}{n} - \bar{x}\,\bar{y}\,, \tag{8.2}$$

де n – об'єм вибірки, тобто кількість пар x, y;

$\bar{x} = \frac{[x]}{n}$ – середнє значення x;

$\bar{y} = \frac{[y]}{n}$ – середнє значення у.

Величина k залежить від розмірності величин x і y і тому вона не зовсім зручна для оцінювання тісноти зв'язку цих величин.

Найбільш ефективним критерієм оцінювання тісноти зв'язку виміряних геодезичних величин є вибірковий коефіцієнт кореляції, що обчислюється за формулою

$$r = \frac{k}{m_x\, m_y}\,, \tag{8.3}$$

де $m_x = \sqrt{\frac{[x^2]}{n} - \bar{x}^2}$; $m_y = \sqrt{\frac{[y]^2}{n} - \bar{y}^2}$.

Властивості коефіцієнта кореляції:

1. Коефіцієнт кореляції набуває значень в інтервалі від -1 до +1, тобто справедлива нерівність $-1 \leq r \leq +1$.

2. Коли коефіцієнт кореляції дорівнює +1 або -1, між величинами x і y існує лінійна функціональна залежність вигляду

$$y = ax + c \text{ або } x = by + d.$$

3. Якщо $r = 0$ то між величинами x і y лінійна залежність відсутня, але можуть існувати складніші залежності.

Коефіцієнт кореляції, обчислений за дослідними даними в загальному випадку є величиною випадковою. Тому при значеннях $r < 0{,}5$ виникає наступне питання: чи підтверджує обчислене значення r наявність стохастичного зв'язку величин x і y або воно є наслідком якихось випадкових чинників? Іншими словами, чи є r величиною значущою?

При $n > 50$ критерієм значущості може бути середня квадратична похибка

$$m_r = \frac{1 - r^2}{\sqrt{n}}. \tag{8.4}$$

Стохастичний зв'язок між величинами x і y вважається встановленим, якщо

$$|r| > 3m_r. \tag{8.5}$$

При $n < 50$ критерієм значущості можуть служити критичні значення коефіцієнта кореляції за $r = 0$ наведені в табл. 8.1. Якщо при об'ємі вибірки n і заданій вірогідності 0,75; 0,90;…;0,995 обчислене значення r більше наведеного в таблиці, то з вірогідністю p можна стверджувати, що $r > 0$ і стохастична залежність між величинами x і y існує.

Таблиця 8.1 – Вихідні дані для оцінювання залежності випадкових величин

n	**Ймовірність наявності залежності між випадковими величинами**					
	0.75	**0.90**	**0.95**	**0.975**	**0.99**	**0.995**
1	2	3	4	5	6	7
3	0.7071	0.9511	0.9877	0.9969	0.9995	0.9999
4	0.5000	0.8000	0.9000	0.9500	0.9800	0.9900
5	0.4040	0.6870	0.8054	0.8783	0.9343	0.9587
6	0.3473	0.6084	0.7293	0.8114	0.8822	0.9172
7	0.3091	0.5509	0.6694	0.7545	0.8329	0.8745
8	0.2811	0.5067	0.6215	0.7067	0.7887	0.8343
9	0.2596	0.4716	0.5822	0.6664	0.7498	0.7977
10	0.2423	0.4428	0.5493	0.6319	0.7155	0.7646
11	0.2281	0.4187	0.5214	0.6021	0.6851	0.7348
12	0.2161	0.3981	0.4973	0.5760	0.6581	0.7079
13	0.2058	0.3802	0.4762	0.5529	0.6339	0.6835
14	0.1968	0.3646	0.4575	0.5324	0.6120	0.6614
15	0.1890	0.3507	0.4409	0.5140	0.5923	0.6411
16	0.1820	0.3383	0.4259	0.4973	0.5742	0.6226
17	0.1757	0.3271	0.4124	0.4822	0.5577	0.6055
18	0.1700	0.3170	0.4000	0.4683	0.5426	0.5897
19	0.1649	0.3077	0.3887	0.4555	0.5285	0.5751
20	0.1602	0.2992	0.3783	0.4438	0.5155	0.5614
21	0.1558	0.2914	0.3687	0.4329	0.5034	0.5487
22	0.1518	0.2841	0.3598	0.4227	0.4921	0.5368
23	0.1481	0.2774	0.3515	0.4132	0.4815	0.5256
24	0.1447	0.2711	0.3438	0.4044	0.4716	0.5151
25	0.1415	0.2653	0.3365	0.3961	0.4622	0.5052
30	0.1281	0.2407	0.3061	0.3610	0.4226	0.4629
35	0.1179	0.2220	0.2826	0.3338	0.3916	0.4296
40	0.1098	0.2070	0.2638	0.3120	0.3665	0.4026
45	0.1032	0.1947	0.2483	0.2940	0.3457	0.3801
50	0.0976	0.1843	0.2353	0.2787	0.3281	0.3610

Приклад 8.2. За вибіркою n = 16 обчислений коефіцієнт кореляції r = 0,72. На перетині рядка n = 16 і стовпця p=0,995 знаходимо критичне значення, яке дорівнює 0,6226. Оскільки 0,72 > 0,6226, з вірогідністю p=0,995 можемо стверджувати, що величини x і y мають стохастичну залежність. Критичні значення для коефіцієнта кореляції p=0 коли, $p = \{r \leq \text{табл. знач.}\, p = 0\} = \gamma$.

Якщо встановлено, що між величинами x і y – зв'язок істотний, може бути складене так зване *рівняння регресії* – функція, що описує стохастичний зв'язок

$$y_i = \bar{y} + r\frac{m_y}{m_x}(x_i - \bar{x}). \tag{8.6}$$

8.3. Залежні випадкові похибки в геодезії

Залежні випадкові похибки в геодезії зустрічаються рідко, але іноді мають місце.

Нехай задано два ряди залежних випадкових похибок Δ_1, Δ_2,…, Δ_n і Δ'_1, Δ'_2,…, Δ'_n, отримані в умовах, що характеризуються стандартами σ і σ'. Тоді на підставі (8.3), (8.4) можемо записати

$$k = \lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta\Delta'']}{n}, \tag{8.7}$$

$$r = \frac{k}{\sigma\sigma'}\,. \tag{8.8}$$

У разі залежних похибок формула основної теореми на відміну від (4.2) набирає вигляду

$$\sigma_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2\sigma_1^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2\sigma_2^2 + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right)^2\sigma_t^2 + 2\sum r_{ij}\,\frac{\partial y\partial y}{\partial x_i\partial y_j}\sigma_i\sigma_j}\,. \tag{8.9}$$

Простим прикладом залежних випадкових похибок є похибки суміжних кутів при вимірюванні способом кругових прийомів. Насправді, похибка загального напряму 2, якщо зменшує кут β_1, то неминуче збільшує кут β_2 і навпаки. Ця обставина породжує негативну стохастичну залежність з коефіцієнтом кореляції r = -0,5.

Складніші випадки залежних похибок розглядаються в другій частині цього курсу.

Таким чином, розглянуті основні відомості випадкових величин і залежних похибок, які зустрічаються в геодезичній практиці. Наведені основні види залежностей випадкових величин і кількісні характеристики лінійних стохастичних залежностей.

Додаткові джерела інформації

1. Бурмистров, Г.А. Теория математической обработки геодезических измерений [Текст]: пособие / Г.А. Бурмистров, В.Д.Большаков. – М.: Недра, 1969. – 400 с.
2. Войславский, Л.К. Теория математической обработки геодезических измерений. Часть 1. Теория погрешностей измерений [Текст] учебно-методическое пособие (для студентов 2 курса дневной формы обучения спец. 7.070908 «Геоинформационные системы и технологии») / Л.К. Войславский. – Х.: ХНАГХ, 2006. – 64 с.
3. Зазуляк, П.М. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірів [Текст] навчальний посібник / П.М. Зазуляк, В.І. Гавриш, Е.М. Євсєєва, М.Д.Йосипчук. – Львів: Видавництво «Растр-7», 2007. – 408 с.

9. ЗРІВНЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ МЕТОДАМИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

9.1. Сутність задачі зрівнювання результатів вимірів в геодезії

Нагадаємо, що до цих пір, математична обробка геодезичних вимірів використовувалася при розв'язанні, в основному, трьох задач:

- знаходження найймовірнішого значення *однієї* фізичної величини в результаті багатократних вимірів (рівноточних або нерівноточних) і оцінки його точності.
- оцінка точності функцій однієї або декількох незалежно виміряних величин.
- оцінка точності за результатами подвійних вимірів.

Здобуття точних і достовірних геодезичних даних не обмежується цими трьома задачами. Їх різноманіття обумовлює застосування в обробці вимірів всіляких математичних методів. Прагнення геодезистів-практиків перевіряти і перевіряти ще раз результати вимірів з метою здобуття точних і надійних результатів привели до формування обов'язкової процедури, яка отримала назву «Надлишкові виміри».

Наприклад, виміряні три кути плоского трикутника. Теоретично відомо, що сума трьох кутів трикутника дорівнює 180°. Досить зміряти два кути α і β трикутника, а третій кут γ можна знайти з виразу $\gamma = 180° - \alpha - \beta$. Це співвідношення справедливе тільки для дійсних значень кутів α і β. Але, оскільки ці величини вимірів містять похибки, то вони можуть привести або до їх часткової компенсації, або до грубої похибки. Виникає ситуація невизначеності, яку геодезисти вирішують шляхом надлишкових вимірів, тобто виміру кута, результат якого також містить деяку похибку. Виникає завдання знаходження поправок до виміряних величин, які б мінімізували сумарну похибку вимірів. Така процедура в геодезії називається *зрівнювання* виміряних величин. Геометрична інтерпретація нев'язки при вимірі трьох кутів трикутника ілюструється рис. 9.1.

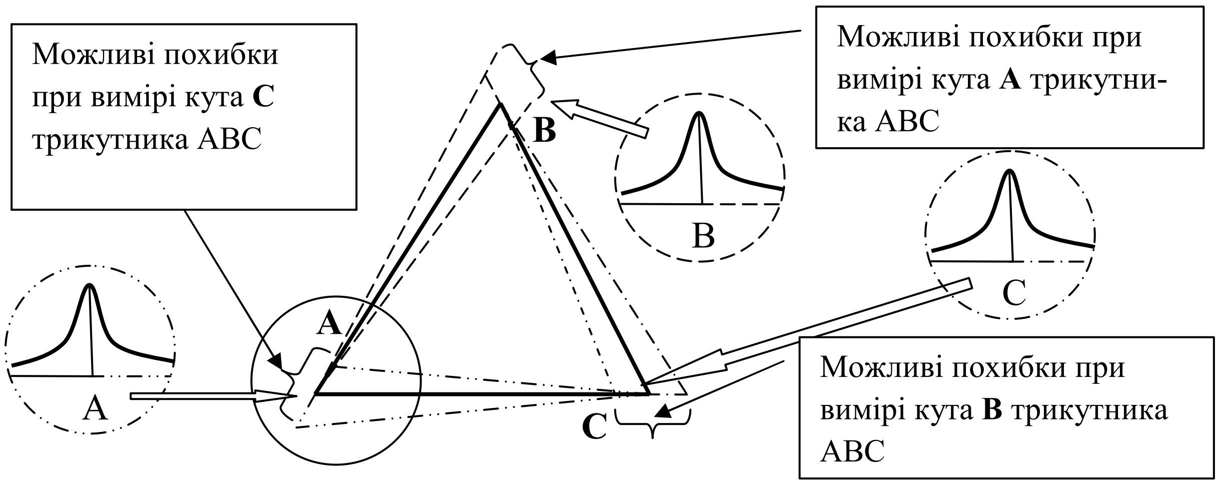


Рис.9.1 – Ілюстрація нев'язок при вимірюванні трьох кутів трикутника

Визначення. 9.1. Зрівнювання геодезичних вимірів це сукупність математичних операцій, що виконуються для набуття найймовірнішого значення геодезичних координат точок земної поверхні і для оцінки точності результатів вимірів.

Зрівнювання проводиться для усунення нев'язок обумовлених наявністю похибок в надлишкових вимірах, і для визначення найймовірніших значень шуканих невідомих або їх значень, близьких до найймовірніших. В процесі зрівнювання це досягається шляхом визначення поправок до виміряних величин (кутів, напрямків, довжин ліній, перевищень тощо).

Розрізняють строге і спрощене (нестроге) зрівнювання геодезичних вимірів. У разі строгого зрівнювання поправки зазвичай визначають за допомогою методу найменших квадратів так, щоб сума квадратів всіх поправок була найменшою. Поправки такого зрівнювання мають найймовірніші (оптимальні) значення. Застосування методу найменших квадратів до зрівнювання виміряних величин справедливо тільки у тому випадку, коли похибки їх мають випадковий характер.

Строге зрівнювання геодезичних мереж, особливо великих за розмірами, пов'язане із труднощами технічного і організаційного характеру. Тому на практиці часто застосовують спрощене (нестроге) зрівнювання, при якому всі геометричні умови виконуються, а найймовірніше значення величин і оцінку точності набувають приблизно.

У геодезичній практиці як при строгому, так і при спрощеному зрівнюванні широко використовуються головним чином два способи: *спосіб умовних вимірів* і *спосіб посередніх вимірів*. При першому способі поправки відшукують безпосередньо до виміряних величин, при другому – до їх функцій (як правило, координат).

Будь-який спосіб зрівнювання складається з наступних основних етапів:

- попередні обчислення;
- складання умовних рівнянь або рівнянь похибок;
- вирішення нормальних рівнянь;
- оцінка точності виміряних і зрівняних величин.

При великому числі нормальних рівнянь найбільш трудомісткою часткою зрівнювальних обчислень є їх розв'язання, тому воно зазвичай здійснюється з використанням заздалегідь розроблених спеціальних програм. Рівняння можуть розв'язуватися методом послідовного винятку невідомих (схема К.Ф. Гауса) або методом ітерації (наближень). Інколи нормальні рівняння не складають, в цьому випадку невідомі визначають безпосередньо із вирішення або умовних рівнянь, або рівнянь похибок. В деяких випадках при обробці матеріалів геодезичних вимірів невисокої точності зрівнювання результатів виконують графічним способом.

У геодезичній практиці застосовуються різні способи зрівнювання: *параметричний, корелатний, комбінований, рекурентний, параметричний спосіб із залежними змінними, корелатний спосіб з додатковими параметрами, спосіб послідовних наближень* та інші.

Розглядатимемо лише два перші способи зрівнювання – параметричний і корелатний.

Таким чином, викладена суть однієї з основних задач геодезії – зрівнювання геодезичних вимірів. На прикладі виміру трьох кутів трикутника (надлишкових вимірів) наочно наведено необхідність пошуку таких значень найймовірніших поправок, які б в сукупності дорівнювали теоретичному результату.

Приведені основні етапи зрівнювання результатів вимірів в геодезії, послідовність і логіка яких відповідатиме викладу навчального матеріалу.

9.2. Два підходи до розв'язання задачі зрівнювання геодезичних побудов

Із попереднього підрозділу можна відмітити, що при розгляді сутності і способів зрівнювання геодезичних побудов в їх основі лежить математичне поняття «рівняння» (умовні рівняння, рівняння похибок, нормальні рівняння та інші), яке на мові алгебри представляє деяку модель процесу вимірів з урахуванням факторів, що впливають на цей процес. Багаторазові, у тому числі і надлишкові виміри в задачах зрівнювання, формально представляються у вигляді системи рівнянь, яку можна інтерпретувати як модель серії (ряду) вимірів.

Різноманіття і особливості вирішення геодезичних завдань приводить до того, що, як правило, процеси вимірів описуються невизначеними системами рівнянь, тобто **недовизначеною** системою – система рівнянь (зазвичай диференціальних), число рівнянь в якій менше числа невідомих і **перевизначеною** системою – система, число рівнянь якої більше числа невідомих. Наведемо на прикладах недовизначену і перевизначену системи рівнянь.

Приклад 9.1.

Візьмемо трикутник, де виміряні три кути. Отже, має місце рівняння

$$\beta_1 + V_1 + \beta_2 + V_2 + \beta_3 + V_3 - 180° = 0,$$

де β – виміряні кути, V – поправки до вимірів. На рис. 9.1 вершині трикутника *A* відповідає кут β_1, вершині B відповідає кут β_2, а вершині C кут β_3. Позначимо $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - 180° = W$, де W – нев'язка в трикутнику. Тоді справедливо записати

$$V_1 + V_2 + V_3 + W = 0. \tag{9.1}$$

Отримано рівняння, яке містить три невідомих V_1, V_2, V_3 і один вільний член W. Таке рівняння має безліч рішень, тобто система рівнянь, що складається з одного рівняння є недовизначеною.

Приклад 9.2.

Розглянемо систему трьох нівелірних ходів з однією вузловою точкою *C***.** При цьому вважатимемо висоту вузлової точки *H* за невідому. Необхідно знайти цю висоту. Пояснимо дане завдання графічно (див. рис. 9.2).

Математична модель даної ситуації має вид:

$$H - H_1 - h_1 = V_1;\ H - H_2 - h_2 = V_2;\ H - H_3 - h_3 = V_3, \tag{9.2}$$

де H_1, H_2, H_3 – висоти початкових реперів, h_1, h_2, h_3 – виміряні перевищення, H – висота вузлової точки C. Таким чином, маємо три рівняння з одним невідомим, тобто система рівнянь (9.2) є перевизначеною і має, також як і у прикладі 9.1, безліч рішень.

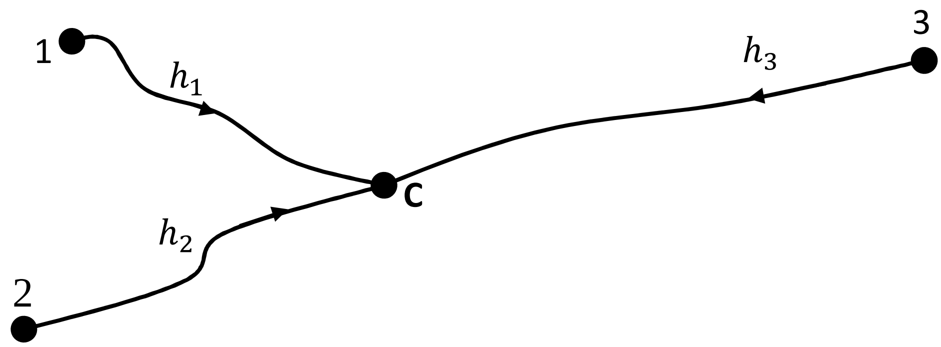


Рис. 9.2 – Система нівелірних ходів з вузловою точкою

Практика показує, що процес зрівнювання геодезичних побудов завжди описується невизначеними системами рівнянь, які не мають єдиного розв'язання, тобто не можуть бути розв'язані способами елементарної алгебри – способами підстановки, порівняння, складання, графічним способом або способом визначення. Метод вирішення невизначених систем рівнянь був запропонований на початку XIX ст. німецьким математиком і геодезистом К.Ф. Гауссом і французьким математиком А.М. Лежандром, який отримав назву методу найменших квадратів.

9.3. Сутність методу найменших квадратів і обґрунтування його використання у зрівнюванні геодезичних побудов

Метод найменших квадратів є одним з методів регресійного аналізу і призначений для оцінки невідомих величин за результатами вимірів, що містять випадкові похибки. Він застосовується також для наближеного представлення заданої функції іншими (простішими) функціями і часто виявляється корисним при обробці спостережень.

З метою збільшення точності результатів вимірів в геодезії виміри шуканої фізичної величини здійснюються багато разів і за остаточний результат приймають арифметичну середину із всіх окремих вимірів. Властивості арифметичної середини мають стохастичну природу і розглянуті в п. 5.1. Враховуючи властивості арифметичної середини легко навести, що сума квадратів відхилень окремих вимірів від арифметичної середини буде менша, ніж сума квадратів відхилень окремих вимірів від якої іншої величини. Отже, правило обчислення арифметичної середини є простим випадком методу найменших квадратів.

Суть вирішення невизначених систем рівнянь, що описують деяку геодезичну побудову полягає в тому, що на них накладаються умови мінімізації

$$\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2 = [pv^2] \to min \tag{9.3}$$

для нерівноточних вимірів, де p – ваги вимірів v – поправка вимірів. У разі рівноточних вимірів формула (9.3) матиме вигляд:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = [v^2] \to min.$$

Розглянемо рішення задачі зрівнювання з використанням методу найменших квадратів на прикладі системи рівнянь (9.2). Представимо цю систему рівнянь у виді:

$$H - l_1 = v_1;\ \ H - l_2 = v_2;\ \ H - l_3 = v_3,$$

де $l_i = H_i + h_i,\ (i = 1{,}2{,}3)$. Підставимо отримані співвідношення v_1, v_2, v_3 у формулу (9.3) отримаємо функцію

$$f(H) = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + p_3 v_3^2 = p_1(H - h_1)^2 + p_2(H - h_2)^2 + p_3(H - h_3)^2.$$

З курсу математичного аналізу відомо, що однією з операцій дослідження монотонної функції є її диференціювання або взяття першої похідної для знаходження в ній локальних екстремумів (мінімуму і максимуму). Тому для визначення мінімуму отриманої функції візьмемо першу похідну по змінній h_i і прирівняємо її до нуля (умова існування локального екстремуму). Отримаємо:

$$f'(H) = 2p_1(H - h_1) + 2p_2(H - h_2) + 2p_3(H - h_3) = 0.$$

Перетворимо отриманий вираз так, щоб шукана величина *H* залишилась в лівій частині виразу. Для цього розкриємо дужки і виконаємо елементарні перетворення, отримаємо:

$$2H(p_1 + p_2 + p_3) - 2(h_1 p_1 + h_2 p_2 + h_3 p_3) = 0,$$
$$2H(p_1 + p_2 + p_3) = 2(h_1 p_1 + h_2 p_2 + h_3 p_3).$$

Розділимо праву і ліву частини рівняння на $2(p_1 + p_2 + p_3)$ отримаємо:

$$H = \frac{h_1 p_1 + h_2 p_2 + h_3 p_3}{p_1 + p_2 + p_3} = \frac{[ph]}{[p]}\ . \tag{9.4}$$

Вираз (9.4) є загальною арифметичною серединою, властивості якої розглянуті в п.п. 6.3.

Для того, щоб визначити який із локальних екстремумів знайдений (мінімум або максимум) продовжимо досліджувати функцію визначаючи її опуклість або увігнутість. Для цього візьмемо другу похідну від отриманої функції.

Позначимо

$$b = \frac{1}{p_1 + p_2 + p_3} > 0.$$

Вираз (9.4) матиме вигляд:

$$H = b(h_1p_1 + h_2p_2 + h_3p_3),$$

тоді $f''(H) = b(p_1 + p_2 + p_3) = b[p] > 0$. Якщо друга похідна функції більше нуля, то локальний екстремум функції є її мінімумом. Отже, справедливо записати:

$$f(H) = [pv^2] \rightarrow min.$$

Отримано єдине рішення системи рівнянь (9.2). При цьому воно виявилося виразом для обчислення загальної арифметичної середини, що підтверджує єдність методу найменших квадратів і методу обчислення арифметичної середини.

Із системи лінійних рівнянь (9.2) і отриманої загальної арифметичної середини виходить, що її розв'язання відповідатиме мінімуму функції (9.3) і відповідно до мінімуму емпіричної середньої квадратичної похибки одиниці ваги, яка характеризує точність нерівноточних вимірів і обчислюється за формулою (6.31). Отже, вагу шуканої величини можна визначити за формулою

$$p_H = \frac{c[p]}{\mu^2},$$

де c – довільна позитивна постійна.

Очевидно, що при будь-яких значеннях c і $[p]$ вага вимірюваної величини p_H буде максимальною. Тому рішення, знайдене методом найменших квадратів відповідає найбільшій вазі шуканої величини.

Виникає питання, наскільки принцип найменших квадратів відповідає природі накопичення похибок вимірів і чи стають значення виміряних величин, виправлені поправками, знайденими методом найменших квадратів, ближче до дійсних значень?

Відповімо на це питання висловлюваннями відомого німецького геодезиста Ф.Р. Гельмерта, який ще в XIX ст. зробив наступні роз'яснення:

1. Якщо результати вимірів містять лише випадкові похибки, що підкоряються нормальному закону розподілу, то значення невідомих, отримані методом найменших квадратів будуть найймовірнішими значеннями невідомих і володітимуть найменшою середньою квадратичною похибкою.

2. Якщо результати вимірів містять похибки, що володіють тільки властивостями компенсації (див. п.п.2.5, властивості обмеженості, незалежності, розсіювання) значення невідомих, хоча і матимуть найбільшу вагу, але не мо-

жуть вважатися за найймовірніші значення невідомих.

3. Якщо ж результати вимірів окрім випадкових, суттєво обтяжені систематичними похибками, то зрівнювання вимірів методом найменших квадратів дасть, як завжди однозначне розв'язання, та знайдені значення не будуть найймовірнішими і не володітимуть найбільшою вагою.

Таким чином, невизначеність систем рівнянь, що описують процеси вимірів (див. п.п. 9.2), а також роз'яснення, зроблені Ф.Р. Гельмертом зумовило появи двох способів зрівнювання геодезичних побудов – *параметричний спосіб*, що застосовується у випадку, якщо невизначеність системи рівнянь носить перевизначений характер і *спосіб зрівнювання виміряних величин, зв'язаних деякими умовами*, якщо система рівнянь є недовизначеною. Останній спосіб ще називається *корелатним*.

10. ПАРАМЕТРИЧНИЙ СПОСІБ ЗРІВНЮВАННЯ ГЕОДЕЗИЧНИХ ПОБУДОВ

10.1. Постановка задачі. Рівняння поправок

Нехай для визначення значень невідомих x, y, z,…, t виконані рівноточні незалежні виміри $L_1, L_2, \dots, L_n$. Загальне число невідомих t, загальне число вимірів n. При цьому $n > t$. Ці умови свідчать про те, що система рівнянь, що відображає процес вимірів є перевизначеною. В даному випадку невідомими можуть бути координати пунктів, висоти реперів та інші фізичні величини, значення яких необхідно визначити, а вимірюваними величинами – горизонтальні напрями, горизонтальні або вертикальні кути, довжини ліній, перевищення тощо. Природно припустити, що між невідомими x, y, z,…, t і вимірюваними величинами L_i, $i = \overline{1,n}$ існує деяка залежність, яку в загальному вигляді можна представити наступним математичним співвідношенням:

$$f_i(x, y, z, \dots, t) = L_i + v_i, \tag{10.1}$$

де v_i - поправки для виміряних значень L_i.

Деталізуємо співвідношення (10.1) і запишемо його у вигляді системи рівнянь поправок:

$$\begin{gathered} f_1(x, y, z, \dots, t) = L_1 + v_1, \\ f_2(x, y, z, \dots, t) = L_2 + v_2, \\ \dots \\ f_n(x, y, z, \dots, t) = L_n + v_n. \end{gathered} \tag{10.2}$$

Зведемо отриману систему рівнянь (10.2) до вигляду зручного для диференціювання і задоволення умови (9.3), тобто умови мінімізації поправок. Для цього введемо деякі прирости до невідомих і позначимо їх x_0, y_0, z_0,…,t_0, і так само до поправок, які позначимо δx ,δy,δz,…,δt. Тоді справедливо записати наступну систему рівнянь:

$$\begin{gathered} x = x_0 + \delta x, \\ y = y_0 + \delta y, \\ z = z_0 + \delta z, \\ \dots \\ t = t_0 + \delta t. \end{gathered} \tag{10.3}$$

Підставимо отримані співвідношення (10.3) в систему рівнянь (10.2) і запишемо функцію в загальному виді:

$$f_i(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, z_0 + \delta z, \dots, t_0 + \delta t) - L_i = v_i\,. \tag{10.4}$$

Для подальшого математичного аналізу отриманого вираження скористаємося процедурами розкладу функції в ряд Тейлора. Нагадаємо, що формула Тейлора застосовуються для апроксимації функції многочленами, а лінеаризація рівнянь відбувається шляхом розкладання в ряд Тейлора і відсікання всіх членів вище першого порядку. Формула Тейлора і одна з теорем диференціального числення для довідки приведена в додатку **Г**.

Припустимо, що функції (10.4) є такими, що їх можна розкласти в ряд Тейлора в границях точок x_0, y_0, z_0,…,t_0. Оскільки прирости δx, δy, δz,…, δt, є малими величинами, то обмежуючись лінійними членами розкладання отримаємо:

$$f_i\Big((x_0, y_0, \dots, t_0) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_0}\right)\delta x + \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_0}\right)\delta y + \dots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial t_0}\right)\delta t\Big) - L_i v_i, \tag{10.5}$$

де $i = \overline{1,n}$.

Введемо позначення:

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_0}\right) = a_i;\ \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_0}\right) = b_i; \dots;\ \left(\frac{\partial f_i}{\partial t_0}\right) = q_i, \tag{10.6}$$

Із урахуванням обмежень і введених позначень, які обертають статистичні члени ряду в малі величини можна записати:

$$f_i(x_0, y_0, z_0, \dots, t_0) - L_i = l_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Тоді систему рівнянь (10.2) з урахуванням виконаних перетворень можна записати в лінеаризованому виді:

$$\begin{gathered}a_1\delta x + b_1\delta y + \cdots + q_1\delta t + l_1 = v_1\ ,\\ a_2\delta x + b_2\delta y + \cdots + q_2\delta t + l_2 = v_2\ ,\\ \ldots\\ a_n\delta x + b_n\delta y + \cdots + q_n\delta t + l_n = v_n\ .\end{gathered} \qquad (10.7)$$

Таким чином, в отриманих рівняннях невідомими є поправки v_i для виміряних значень L_i, $i = \overline{1,n}$ і прирости поправок δx, δy, δz,..., δt для значень параметрів x_0, y_0, z_0,...,t_0. Тому отримана система параметричних рівнянь (10.7) є недовизначеною, тому що кількість невідомих більша, ніж кількість рівнянь, яка дорівнює n.

10.2. Мінімум $[v^2]$. Нормальні рівняння

На основі отриманої в п.п. 10.1 систем рівнянь (10.7), яка описує лінеаризовану систему поправок покажемо процедуру її нормалізації. Для цього запроваджуватимемо обмеження на число невідомих в системі рівнянь з метою зменшення розмірності вирішуваного завдання. Вважатимемо, що число рівнянь дорівнює n, а число невідомих дорівнює 3. Тоді система рівнянь (10.7) набере вигляду:

$$\begin{gathered}a_1\delta x + b_1\delta y + c_1\delta z + l_1 = v_1\ ,\\ a_2\delta x + b_2\delta y + c_2\delta z + l_2 = v_2\ ,\\ \ldots\\ a_n\delta x + b_n\delta y + c_n\delta t + l_n = v_n\ .\end{gathered} \qquad (10.8)$$

Число надмірних вимірів в даному випадку дорівнює $r = n - 3$ і тому система рівнянь не має єдиного рішення.

Знайдемо для цієї системи мінімум $[v^2]$. Для цього виконаємо наступні перетворення. Спочатку зведемо в квадрат праві і ліві частини рівнянь поправок (10.8), а потім результати складемо. Результат запишемо в символах К.Ф. Гаусса

$$\begin{gathered}[v^2] = [aa]\delta x^2 + 2[ab]\delta x\delta y + 2[ac]\delta x\delta z + 2[al]\delta x + [bb]\delta y^2 +\\ +2[bc]\delta y\delta z + 2[bl]\delta y + [cc]\delta z^2 + 2[cl]\delta z + [ll].\end{gathered} \qquad (10.9)$$

Для знаходження локального екстремуму отриманої функції, тобто $min[v^2]$ візьмемо часткові похідні за невідомими δx, δy, δz і прирівняємо їх до нуля. Отримаємо:

$$\frac{\partial[v^2]}{\partial\delta x} = 2[aa]\delta x + 2[ab]\delta y + 2[ac]\delta z + 2[al] = 0,$$

$$\frac{\partial[v^2]}{\partial\delta y} = 2[ab]\delta x + 2[bb]\delta y + 2[bc]\delta z + 2[bl] = 0,$$

$$\frac{\partial[v^2]}{\partial\delta z} = 2[ac]\delta x + 2[bc]\delta y + 2[cc]\delta z + 2[cl] = 0.$$

Скоротимо дані вирази на спільний множник 2 і отримаємо систему нормальних рівнянь, в якій число невідомих дорівнює числу рівнянь

$$\begin{aligned} [aa]\delta x + [ab]\delta y + [ac]\delta z + [al] = 0, \\ [ab]\delta x + [bb]\delta y + [bc]\delta z + [bl] = 0, \\ [ac]\delta x + [bc]\delta y + [cc]\delta z + [cl] = 0. \end{aligned} \qquad (10.10)$$

Така система рівнянь має єдине рішення і тому її прийнято називати системою нормальних рівнянь.

У отриманій системі рівнянь коефіцієнти при невідомих, які розташовані по головній діагоналі прийнято називати квадратичними. Особливістю отриманої системи рівнянь є те, що коефіцієнти головної діагоналі завжди позитивні, а коефіцієнти при невідомих, розташовані симетрично щодо головної діагоналі, попарно рівні між собою, тобто система рівнянь (10.10) симетрична. Розв'язавши цю систему, знаходимо невідомі $\delta x, \delta y, \delta z$. Підставивши набутих значень невідомих в систему рівнянь (10.8) можна знайти значення поправок.

Таким чином, описана процедура перетворення системи лінеаризованих рівнянь, яка не має єдиного розв'язання в систему нормальних рівнянь що має єдине розв'язання.

10.3. Матричне представлення параметричного методу зрівнювання. Розв'язання нормальних рівнянь

Відомо, що системи лінійних рівнянь можуть бути представлені і перетворені з використанням математичного апарату лінійної алгебри.

Використаємо приклад системи параметричних лінійних рівнянь (10.8), приведений в попередньому підрозділі і покажемо їх матричне представлення. Позначимо матрицю коефіцієнтів a розміром $n \times t$

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n & c_n \end{pmatrix},$$

матрицю-стовпець Δ розміром $t \times 1$ невідомих поправок $\delta x,\ \delta y,\ \delta z, \ldots, \delta t$, яка є вектором поправок до найближчих значень параметрів x_0, y_0, z_0,…,t_0

$$\delta = \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \cdots \\ \delta z \end{pmatrix},$$

матрицю-стовпець L розміром $n \times 1$ вільних членів або вектором вільних членів системи рівнянь

$$l = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \cdots \\ l_n \end{pmatrix},$$

і матрицю-стовпець v розміром $n \times 1$ або вектор поправок до результатів вимірів

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Запроваджені позначення системи лінійних рівнянь (10.8) можна записати в матричній формі:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \cdots \\ \delta z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \cdots \\ l_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_2 \end{pmatrix}$$

або у скороченому виді:

$$a \cdot \delta + l = v\,. \tag{10.11}$$

Досліджуємо отримане матричне рівняння. Для цього виконаємо операцію транспонування матриці A і кожен член рівняння (10.11) помножимо на матрицю A^T, отримаємо

$$a^T a \cdot \delta + a^T l = a^T v. \tag{10.12}$$

Розглянемо окремо в отриманому матричному рівнянні добутки $a^T a$, $a^T l$ і $a^T v$.

$$a^T a = \begin{pmatrix} a_1 a_1 + a_2 a_2 \cdots + a_n a_n & a_1 b_1 + a_2 b_2 \cdots + a_n b_n & a_1 c_1 + a_2 c_2 \cdots + a_n c_n \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 \cdots + a_n b_n & b_1 b_1 + b_2 b_2 \cdots + b_n b_n & b_1 c_1 + b_2 c_2 \cdots + b_n c_n \\ a_1 c_1 + a_2 c_2 \cdots + a_n c_n & b_1 c_1 + b_2 c_2 \cdots + b_n c_n & c_1 c_1 + c_2 c_2 \cdots + c_n c_n \end{pmatrix}.$$

Запишемо кожен елемент отриманої матриці в символах К.Ф. Гауса:

$$a^T a = A = \begin{pmatrix} [aa] & [ab] & [ac] \\ [ab] & [bb] & [bc] \\ [ac] & [bc] & [cc] \end{pmatrix}, \tag{10.13}$$

тобто отримана матриця коефіцієнтів нормальних рівнянь (10.10).

Розглянемо добуток матриці $A^T L$

$$a^T l = \begin{pmatrix} a_1 l_1 + a_2 l_2 + \cdots + a_n l_n \\ b_1 l_1 + b_2 l_2 + \cdots + b_n l_n \\ c_1 l_1 + c_2 l_2 + \cdots + c_n l_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [al] \\ [bl] \\ [cl] \end{pmatrix} = \lambda, \qquad (10.14)$$

тобто отримана матриця-стовпець вільних членів нормальних рівнянь (10.10).

Знайдемо добуток матриці $A^T V$:

$$a^T v = \begin{pmatrix} a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots + b_n v_n \\ c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [av] \\ [bv] \\ [cv] \end{pmatrix} = T. \qquad (10.15)$$

Тут елементи матриці T можна прирівняти до нуля, тобто

$$[av] = 0, [bv] = 0\ , [cv] = 0\ , \qquad (10.16)$$

тому що беручи до уваги вирази (10.13) і (10.14) і порівнюючи рівняння (10.12) в матричній формі із системою рівнянь (10.10) приходимо до висновку, що їх ліві частини рівні. Отже, їх праві частини також мають бути рівні.

Беручи до уваги зроблені вище перетворення систему нормальних рівнянь запишемо у виді:

$$A \cdot \delta + \lambda = 0. \qquad (10.17)$$

Враховуючи, що матриця A є особливою, оскільки її визначник дорівнює нулю, а між рядками і стовпцями існує лінійна залежність, то для вирішення матричного рівняння (10.17) необхідно і достатньо помножити його зліва на матрицю A^{-1} зворотну матриці A. В результаті отримаємо матричне рівняння:

$$\delta = -A^{-1} \cdot \lambda\ . \qquad (10.18)$$

Отримана матриця-стовпець δ поправок до виміряних величин v.

Приведені вище математичні перетворення, дають підставу записати строгу послідовність процедур, що забезпечують зрівнювання параметричним способом з використанням вихідних даних у вигляді матриць.

Процедура 1. Підготовка вихідних даних для зрівнювання.

Необхідно підрахувати кількість шуканих невідомих t, а також число незалежних вимірів n і визначити число надлишкових вимірів $r = n - t$. Якщо $n = t, r = 0$, то завдання зрівнювання виміряних величин не виникає.

Процедура 2. Визначення наближених значень невідомих x_0, y_0, z_0,…,t_0 з використанням тільки необхідних вимірів.

Процедура 3. Складання рівнянь поправок в загальному вигляді (10.2) і їх лінеаризація (10.7). Внаслідок виконання процедури отримуємо коефіцієнти рівнянь поправок a, b, c,…, q.

Процедура 4. Обчислення вільних членів рівнянь поправок за формулами (10.6).

Процедура 5. Складання рівняння поправок в матричній формі (10.11). В результаті виконання процедури складаються матриці коефіцієнтів рівнянь поправок a розміром $(n \times t)$ і матриця-стовпець вільних членів l розміром $(n \times 1)$.

Процедура 6. Транспонування матриці a.

Процедура 7. Множення матричного рівняння (10.11) зліва на матрицю A^T. Внаслідок виконання процедури отримуємо систему нормальних рівнянь (10.10) представлену в матричній формі (10.17).

Процедура 8. Обернення матриці коефіцієнтів нормальних рівнянь A і отримання матриці A^{-1}. Розмір матриць складає $(t \times t)$.

Процедура 9. Множення рівняння (10.17) зліва на матрицю A^{-1}. В результаті виконання процедури отримуємо матрицю-стовпець поправок Δ розміром $(t \times 1)$.

Процедура 10. Обчислення зрівняних значень невідомих $x, y, \ldots, t$ за формулами (10.3).

Процедура 11. Підстановка матриці-стовпця δ в рівняння (10.11), а також множення і підсумовування матриць. В наслідок виконання процедури отримуємо матрицю-стовпець поправок до зміряних величин v розміром $(n \times 1)$. Обчислюються зрівняні значення $L_i + V_i$.

Процедура 12. Оцінка точності отриманих в результаті зрівнювання невідомих величин $x, y, \ldots, t$.

Таким чином, параметричний спосіб має на увазі обчислення поправок не до виміряних величин, а до деяких наближених значень (параметрів), тобто до кінцевих результатів зрівнювання, якими в геодезичних мережах є координати або висоти пунктів, і безпосереднє отримання найймовірніших значень параметрів, минувши найймовірніші значення виміряних елементів мережі.

Наведено як на основі лінійної алгебри, а саме матричних представлень, а також операцій над ними можна розв'язувати нормальні рівняння зрівнювання геодезичних вимірів параметричним способом. Приведена строга послідовність математичних процедур, що забезпечують оперативне вирішення практичних задач зрівнювання.

10.4. Оцінка точності зрівняних значень невідомих геодезичних вимірів

Завершальною процедурою зрівнювання геодезичних вимірів параметричним способом, як це відомо із попереднього підрозділу, є оцінка точності зрівняних значень невідомих. Розглянемо цю процедуру детально. Як і в математичній обробці однієї величини оцінюватимемо точність декількох невідомих, тобто визначимо їх середні квадратичні похибки $m_x, m_y, \dots, m_t$. Розв'язання даної задачі має деякі особливості, що полягають в тому, що поправки δx, δy, δz, …, δt, – величини залежні. Причому математичному аналізу піддається не одна функція, а декілька.

Оскільки величини L_1, L_2,…,L_n (див. п.п. 10.1) виміряні незалежно і рівноточно, їх середні квадратичні похибки дорівнюють

$$m_1 = m_2 = \cdots = m_n = m.$$

Відповідно будуть рівні і їх ваги $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 1$, а також середні квадратичні похибки вимірів m і середні квадратичні похибки одиниць ваги μ, $m = \mu$.

Звернемося до рівняння (10.18), де елементи матриць Δ і λ є змінними, а елементами зворотної матриці A^{-1} є безперервні функції (10.10), що диференціюються, і відповідно до основної теореми теорії похибок (див. п.п.4.1) характеризуються стандартами даних функцій. Тоді зворотна матриця A^{-1} може бути представлена функціональним визначником матриці Якобі (Якобіаном), елементи якого, є часткові похідні.

Запишемо:

$$A^{-1} = det\begin{pmatrix} \frac{\partial\delta_1}{\partial\lambda_1}(\lambda) & \frac{\partial\delta_1}{\partial\lambda_2}(\lambda) & \frac{\partial\delta_1}{\partial\lambda_3}(\lambda) \\ \frac{\partial\delta_2}{\partial\lambda_1}(\lambda) & \frac{\partial\delta_2}{\partial\lambda_2}(\lambda) & \frac{\partial\delta_2}{\partial\lambda_3}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\delta_n}{\partial\lambda_1}(\lambda) & \frac{\partial\delta_n}{\partial\lambda_2}(\lambda) & \frac{\partial\delta_n}{\partial\lambda_3}(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (10.19)$$

Підставимо отриману матрицю (10.19), а також матриці Δ і λ у вираз (10.18) і враховуючи властивості операцій над матрицями отримаємо наступне співвідношення:

$$M_\delta^2 = m^2\{A^{-1}A^T A(A^T)^{-1}\} = m^2(A^T)^{-1}.$$

Спрощуючи отриману формулу матимемо:

$$M_\delta^2 = m^2 A^{-1}. \quad (10.20)$$

Отримана і записана в матричному вигляді формула для розрахунку середньої квадратичної похибки сукупності поправок за умови рівноточних вимірів і незалежності поправок δx, δy, δz, …, δt.

Для обчислення точності зрівняних значень невідомих у разі їх залежності виконаємо наступні процедури. Враховуючи, що матриця A^{-1} симетрична, замінимо в ній діагональні елементи на вагові коефіцієнти, величини яких дорівнюють зворотним вагам невідомих

$$Q_{ij} = \frac{1}{P_{ij}}, \quad (i = j).$$

Відмітимо, що діагональні елементи формованої матриці Q завжди позитивні. Недіагональні елементи Q_{ij}, $(i \neq j)$ можуть бути як позитивними, так і негативними. Вони є кореляційними моментами, обумовленими залежністю певних невідомих. Наприклад, елемент Q_{12} і рівний йому елемент Q_{21} слід розглядати як кореляційний момент, обумовлений залежністю величин x і y, тобто $Q_{12} = Q_{21} = Q_{xy}$.

Позитивне значення Q_{xy} свідчить про те, що збільшення або зменшення похибки m_x неминуче приводить до збільшення або зменшення величини m_y. І, навпаки, негативне значення Q_{xy} свідчить про те, що збільшення m_x тягне за собою зменшення m_y, а зменшення $m_x -$ збільшення m_y.

Тоді справедливо записати, що, і $M_\delta^2 = m^2 Q$. У розгорненому вигляді формула (10.20) набере вигляду

$$M_\delta^2 = m^2 \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots Q_{1t} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots Q_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots \cdots \\ Q_{t1} & Q_{t2} & \cdots Q_{tt} \end{pmatrix}. \tag{10.21}$$

Звідси витікає, що квадрат середньої квадратичної похибки сукупності невідомих x, y, z,…, t є матрицею, яка отримана множенням квадрата середньої квадратичної похибки m виміряних величин L_i, $i = \overline{1,n}$ на матрицю Q.

При обчисленні середніх квадратичних похибок невідомих x, y, z,…, t враховуватимемо, що ваги функцій результатів вимірів пов'язані із стандартом і стандартом одиниці ваги співвідношенням (6.8). Тоді справедливо записати наступні співвідношення:

$$m_x = m\sqrt{Q_{11}}, \quad m_y = m\sqrt{Q_{22}}, \ldots, m_t = m\sqrt{Q_{tt}}. \tag{10.22}$$

З проведеного аналізу виходить, що хоча величини L_i, $i = \overline{1,n}$ виміряні рівноточно і незалежно, отримані в результаті зрівнювання значення незалежних величин x, y, z,…, t є нерівноточними і залежними величинами.

Приклад 10.1.

Якщо шуканими невідомими є координати x, y пунктів геодезичної мережі, то сукупна похибка положення пункту в даній системі координат відповідно до виразу (10.21) характеризується матрицею:

$$M^2 = m^2 \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{xy} & Q_{yy} \end{pmatrix}. \qquad (10.23)$$

Отримана формула дає можливість розрахувати наступні точності характеристики положення точки на площині:

1. Середні квадратичні похибки по осях координат m_x і m_y, обчислювані за формулами (10.22). Вони залежать від вибору системи координат (рис. 10.1).

2. Кругову середню квадратичну похибку, обчислювану за формулою:

$$m = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}, \qquad (10.24)$$

яка знайшла широке застосування в геодезичній практиці, при цьому виходячи з припущення, що розсіювання вимірів по осях *X* і *Y* має однакову ймовірність.

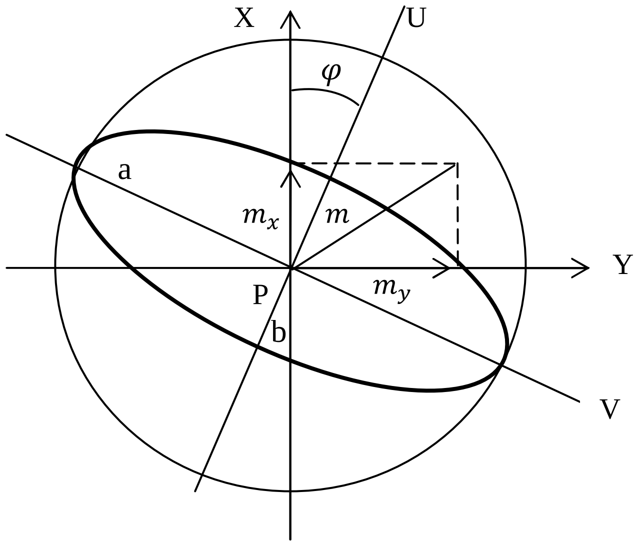


Рис. 10.1 – Ілюстрація для прикладу 10.1

3. Еліпс похибок, орієнтація і розміри осей якого визначають найбільш вірогідні напрями і величину максимальної і мінімальної середньої квадратичної похибки положення геодезичного пункту.

Для визначення сукупної похибки положення геодезичного пункту скористаємося співвідношенням (10.23) і рис. 10.1, де показано, що поворотом осей навколо точки *P* можна підібрати таку систему координат *UV*, при якій недіагональні елементи матриці Q дорівнюватимуть нулю і даний вираз матиме вигляд:

$$M^2 = m^2 \begin{pmatrix} Q_{uu} & 0 \\ 0 & Q_{vv} \end{pmatrix}. \qquad (10.25)$$

Необхідний для такого перетворення кут повороту осей обчислюється за формулою:

$$tg\,2\varphi = \frac{2Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}}\ , \qquad (10.26)$$

а елементи Q_{uu}, Q_{vv} на основі рівнянь:

$$Q_{uu}, Q_{vv} = \frac{1}{2}\left\{Q_{xx} + Q_{yy} \pm \sqrt{\left(Q_{xx} - Q_{yy}\right)^2 + 4Q_{xy}^2}\ \right\}.$$

Велика і мала піввісь еліпса похибок будуть відповідно дорівнювати:

$$a = m\sqrt{Q_{uu}},\ \ b = m\sqrt{Q_{vv}}. \qquad (10.27)$$

Таким чином, детально розглянута процедура (див. п.п.10.3 процедура 12) оцінювання точності зрівняних значень невідомих. На прикладі демонструється послідовність обчислення точнісних характеристик.

10.5. Обчислення емпіричної середньої квадратичної похибки за поправками, одержаними із зрівнювання.

Як правило, виміряні величини L_i визначені за умови:

$$[v^2] = min,$$

тобто є підстава припускати, що на їх основі можна отримати спроможну і незміщену оцінку середньої квадратичної похибки m. Проте, на підставі цієї ж умови і здорового глузду можна стверджувати, що сума квадратів дійсних похибок завжди буде більша суми квадратів отриманих поправок. Тоді справедлива нерівність $[\Delta^2] > [v^2]$, де Δ – дійсні похибки. Розділивши цю нерівність на n, отримаємо:

$$m^2 = \frac{[\Delta^2]}{n} > \frac{[v^2]}{n}.$$

Отже, величина $\frac{[v^2]}{n}$ буде спроможною, але зміщеною оцінкою m. Для того, щоб вона виявилася незміщеною, необхідно знаменник правої частини зменшити на деяку, поки невідому, величину u.

Тоді справедливо записати емпіричну середню квадратичну похибку в наступному вигляді:

$$m^2 = \frac{[v^2]}{n - u}\ . \qquad (10.28)$$

В даному випадку, задача зводиться до визначення невідомої величини u.

Проаналізуємо вираз (10.28) і перш за все, відзначимо, що загальне число вимірів n не може бути менше числа необхідних вимірів, тобто $n \geq t$. Звідси витікає, що u не може бути більше t, оскільки при $n = t$ знаменник у формулі (10.28) дорівнюватиме нулю. Отже $u \leq t$.

Зробимо припущення, що $u < t$. При $n = t$ завдання зрівнювання не виникає, поправки $v_1 = 0$, $v_2 = 0$,…, $v_t = 0$, отже і $[v^2] = 0$, що суперечить здоровому глузду, оскільки $m > 0$.

Це дає підставу, формулу (10.28) записати у виді:

$$m^2 = \frac{[v^2]}{n - t}\,, \tag{10.29}$$

Наведений доказ рівності (10.29) заснований на припущеннях і евристичних міркуваннях тому не є суворим. Існує і строгий доказ, який є громіздким і в теперішньому курсі не розглядається.

З тієї причини, що емпірична середня квадратична похибка m найчастіше визначається із невеликої кількості вимірів, її надійність визначає середня квадратична похибка, яка обчислюється за формулою:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n - t)}}\,. \tag{10.30}$$

Таким чином, на основі умов мінімізації суми квадратів поправок розглянутий наближений спосіб оцінювання їх точності за результатами зрівнювання.

10.6. Середня квадратична похибка виміряних величин після зрівнювання

У попередньому підрозділі знайдено співвідношення (10.28), яке дозволяє оцінювати значення середньої квадратичної похибки m виміряних величин до зрівнювання. Виникає справедливе питання. Чи зміниться ця величина після зрівнювання?

Щоб відповісти на це питання приведемо доведення теореми відоме з теорії похибок.

Теорема 10.1. Середнє значення відношення квадрата середньої квадратичної похибки після зрівнювання до квадрата середньої квадратичної похибки до зрівнювання, тобто її середнє зменшення, обумовлене зрівнюванням системи виміряних величин способом найменших квадратів, дорівнює відношенню числа необхідних вимірів до всіх вимірів, тобто:

$$\frac{m_{\text{зр}}^2}{m^2} = \frac{t}{n} = q, \tag{10.31}$$

де $m^2_{зр}$ – середня квадратична похибка виміряних величин після зрівнювання, t – число необхідних вимірів, n – число всіх вимірів.

Доказ

Для зручності і простоти доведення теореми запроваджуватимемо обмеження на кількість невідомих. Вважатимемо, що система лінеаризованих рівнянь поправок (10.7) містить три невідомих і n рівнянь. Тоді в матричному вигляді систему рівнянь поправок можна записати наступним чином:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_1 + V_1 \\ l_2 + V_2 \\ \cdots \\ l_n + V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l'_1 \\ l'_2 \\ \cdots \\ l'_n \end{pmatrix}, \tag{10.32}$$

де, $i = \overline{1,n}$ – зрівняні значення вільних членів.

Представимо співвідношення (2.31) у виді:

$$q = \frac{\frac{m_1^2}{m^2} + \frac{m_2^2}{m^2} + \cdots + \frac{m_n^2}{n^2}}{n}, \tag{10.33}$$

де $m^2_{зр} = \frac{m_1^2}{m^2} + \frac{m_2^2}{m^2} + \cdots + \frac{m_n^2}{n^2}$.

Значення l' – функції поправок $\delta x, \delta y, \delta z$. Знайдемо формульні співвідношення доданків $\frac{m_1^2}{m^2}, \frac{m_2^2}{m^2}, \cdots, \frac{m_n^2}{n^2}$ формули (10.33). Для цього продиференціюємо початкові рівняння поправок (10.7) по змінних $\delta x, \delta y, \delta z$ і враховуючи результати доведення основної теореми похибок і раніше отримані формули (10.19) і (10.20) представимо середні квадратичні похибки у вигляді добутку Якобіанів:

$$m_i^2 = m^2 \left\{ \frac{\partial l'_i}{\partial \delta x, \partial \delta y, \partial \delta z} M_\delta^2 \left(\frac{\partial l'_i}{\partial \delta x, \partial \delta y, \partial \delta z} \right)^T \right\}. \tag{10.34}$$

Розділимо праву і ліву частину отриманого рівняння на m^2 і проведемо необхідні операції з Якобіанами. Крім того, враховуючи рівноточність вимірів отримаємо:

$$\frac{m_1^2}{m^2} = (a_1 \quad b_1 \quad c_1) \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} =$$
$$= a_1 a_1 Q_{11} + a_1 b_1 Q_{21} + a_1 c_1 Q_{31} + a_1 b_1 Q_{12} + b_1 b_1 Q_{22} + b_1 c_1 Q_{32} +$$
$$+ a_1 c_1 Q_{13} + b_1 c_1 Q_{23} + c_1 c_1 Q_{33}. \tag{a}$$

Аналогічно, для $\frac{m_2^2}{m^2}, \cdots \frac{m_n^2}{n^2}$ отримаємо:

$$\frac{m_2^2}{m^2} = a_2a_2Q_{11} + a_2b_2Q_{21} + a_2c_2Q_{31} + a_2b_2Q_{12} + b_2b_2Q_{22} + b_2c_2Q_{32} + \\ +a_2c_2Q_{13} + b_2c_2Q_{23} + c_2c_2Q_{33}, \qquad \text{(b)}$$

$$\frac{m_3^2}{m^2} = a_3a_3Q_{11} + a_3b_3Q_{21} + a_3c_3Q_{31} + a_3b_3Q_{12} + b_3b_3Q_{22} + b_3c_3Q_{32} + \\ +a_3c_3Q_{13} + b_3c_3Q_{23} + c_3c_3Q_{33}, \qquad \text{(c)}$$

$$\cdots$$

$$\frac{m_n^2}{m^2} = a_na_nQ_{11} + a_nb_nQ_{21} + a_nc_nQ_{31} + a_nb_nQ_{12} + b_nb_nQ_{22} + b_nc_nQ_{32} + \\ +a_nc_nQ_{13} + b_nc_nQ_{23} + c_nc_nQ_{33}. \qquad \text{(d)}$$

Підставляючи (a), (b), (c) і (d) у формулу (10.33) підсумуємо добутки a_i , b_i, c_i виносячи за дужки вагові коефіцієнти Q_{ij}. В результаті знайдемо шукане значення:

$$q = \frac{m^2}{m^2 n}\{([aa]Q_{11} + [ab]Q_{21} + [ac]Q_{31}) + \\ +([ab]Q_{12} + [bb]Q_{22} + [bc]Q_{32}) + \\ +([ac]Q_{13} + [bc]Q_{23} + [cc]Q_{33})\}. \qquad (10.35)$$

Із властивостей операцій над матрицями в лінійній алгебрі відомо, що

$$A \cdot A^{-1} = E,$$

де *E* – одинична матриця, у якої діагональні елементи дорівнюють *1*, а недіагональні – 0. У формулі (10.35) суми добутків в круглих дужках, враховуючи (10.13) і (10.21) є добутками *і-го* рядка матриці *A* на *і-й* стовпець матриці A^{-1}. Отже, вони відповідають діагональним елементам матриці *E*, які дорівнюють *1*. Тоді на підставі (10.31), (10.33) і (10.35) можна записати:

$$\mathrm{q} = \frac{m_{\text{зр}}^2}{m^2 n} = \frac{1+1+1}{n} = \frac{3}{n}.$$

При трьох невідомих $t = 3$ і поширюючи отриману рівність на будь-яке число невідомих, остаточно отримаємо:

$$q = \frac{m_{\text{зр}}^2}{m^2} = \frac{t}{n}, \qquad (10.36)$$

що і потрібно було довести (див. формулу 10.31).

Таким чином, зрівнювання методом найменших квадратів підвищує в середньому точність результатів вимірів.

10.7. Зрівнювання і оцінка точності при нерівноточних вимірах

У попередньому підрозділі розглядалася оцінка точності тільки рівноточних вимірів. Відомо, що у разі нерівноточних вимірів точність виміряних величин $L_1, L_2, \dots, L_n$ характеризується вагами $p_1, p_2, \dots, p_n$. Отже, і вільні члени в рівняннях поправок:

$$l_i = f_i(x_0, y_0, \dots, t_0) - L_i,$$

що є функціями виміряних величин, також матимуть ваги p_i.

Зрівнювання результатів вимірів проводитимемо з урахуванням умов: $[pv^2] = min$. Розглянемо деяку функцію $l' = l\sqrt{p_i}$. Згідно тверджень, зроблених в п.п. 6.2 вагу цієї функції можна прирівняти до 1

$$\frac{1}{p_{l'}} = \frac{1}{p_l}\left(\sqrt{p_l}\right)^2 = 1.$$

Отже, оскільки $p_{l'} = 1$ у цьому випадку нерівноточні вимірювання можна звести до рівноточних. Для цього достатньо кожне рівняння системи поправок помножити на $\sqrt{p_i}$, тобто систему лінійних рівнянь поправок можна записати у загальному вигляді:

$$a_i\delta x\left(\sqrt{p_i}\right) + b_i\delta y\left(\sqrt{p_i}\right) + c_i\delta z\left(\sqrt{p_i}\right) + l_i\left(\sqrt{p_i}\right) = V_i\left(\sqrt{p_i}\right),\ i = \overline{1,n}\,.$$

Запишемо цю систему рівнянь в матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{p_1} & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{p_2} & 0 \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & \sqrt{p_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \cdots \\ \delta z \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \sqrt{p_1} & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{p_2} & 0 \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & \sqrt{p_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \cdots \\ l_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{p_1} & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{p_2} & 0 \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & \sqrt{p_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \cdots \\ V_2 \end{pmatrix} = \sqrt{p_i} \cdot A \cdot \Delta + \sqrt{p_i} \cdot L = \sqrt{p_i} \cdot V. \qquad (10.37)$$

З метою звільнення від знаку радикала, а також перетворення формули (10.37) до виду нормальних рівнянь помножимо її праву і ліву частини на добуток $\sqrt{p_i} \cdot A^T$. Отримаємо:

$$A^T \cdot P \cdot A \cdot \Delta + A^T \cdot P \cdot L = A^T \cdot P \cdot V, \qquad (10.38)$$

де

$$P = \sqrt{p_i} \cdot \sqrt{p_i} = \begin{pmatrix} p_1 & & & 0 \\ & p_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & p_n \end{pmatrix}.$$

Спростимо формулу (10.38). Для цього позначимо матрицю коефіцієнтів нормальних рівнянь:

$$A^T \cdot P \cdot A = \begin{pmatrix} [paa] & [pab] & [pac] \\ [pab] & [pbb] & [pbc] \\ [pac] & [pba] & [pcc] \end{pmatrix} = \tilde{A}. \tag{10.39}$$

Вектор-стовпець вільних членів нормальних рівнянь позначимо:

$$A^T \cdot P \cdot L = \begin{pmatrix} [pal] \\ [pbl] \\ [pcl] \end{pmatrix} = \tilde{\lambda}. \tag{10.40}$$

Для дотримання умов побудови нормальних рівнянь вектор-стовпець $A^T \cdot P \cdot V$ прирівняємо до нуля. Отримаємо:

$$A^T \cdot P \cdot V = \begin{pmatrix} [paV] \\ [pbV] \\ [pcV] \end{pmatrix} = 0. \tag{10.41}$$

З введеними позначеннями система нормальних рівнянь набуде вигляду:

$$\tilde{A} \cdot \Delta + \tilde{\lambda} = 0. \tag{10.42}$$

Отримане матричне рівняння як і у разі рівноточних вимірів, вирішується шляхом множення його зліва на зворотну матрицю:

$$\Delta = \widetilde{A^{-1}} \cdot \tilde{\lambda}. \tag{10.43}$$

При нерівноточних вимірах аналогічно вирішується і завдання оцінки точності невідомих $\delta x, \delta y, \dots, \delta t$ з використанням формули:

$$M_\delta^2 = \mu^2 \cdot \widetilde{A^{-1}}.$$

Емпірична середня квадратична похибка одиниці ваги обчислюється за формулою:

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n - t}}. \tag{10.44}$$

Таким чином, видно, що зрівнювання нерівноточних вимірів принципово не відрізняється від зрівнювання рівноточних вимірів.

10.8. Приклади складання рівнянь поправок для різних видів геодезичних вимірів і мереж

Приклад зрівнювання вимірів при побудові геодезичної мережі методом тріангуляції

Прийнято вважати що метод тріангуляції винайшов і вперше застосував голландський астроном і математик, професор Лейденського університету Снелліус Віллеброд в 1615–17 р.р.

Для геодезичних побудов, на сьогоднішній день використовується наступне визначення терміну «тріангуляція».

Визначення 10.1.

Тріангуляцією називають метод визначення положення геодезичних пунктів побудованих на місцевості систем суміжно розташованих трикутників, в яких вимірюють довжину однієї сторони (по базису) і кути, а довжини інших сторін отримують шляхом тригонометричних обчислень. Він є основним методом створення опорної геодезичної мережі і кутових вимірів.

Даний метод полягає в побудові мереж трикутників, що примикають один до одного, і у визначенні положення їх вершин у вибраній системі координат. У кожному трикутнику вимірюють всі три кути, а одну із сторін визначають обчисленням, шляхом послідовного визначення попередніх трикутників.

Визначення трикутників починаючи від його сторони, яка отримана методом вимірів. Така сторона трикутника називається *базисною* стороною тріангуляції. Як правило, в мережах тріангуляції для контролю і підвищення точності вимірюють більше число базисів або базисних сторін, чим це мінімально необхідно.

Розглянемо приклад знаходження на місцевості координат точок *В* і *Ф* за умови, що відомі координати пунктів *Ш* і *Е* (табл. 10.1). Методом тріангуляції необхідно знайти координати цих точок, які максимально відповідають їх дійсним значенням. Основною процедурою методу тріангуляції в даному випадку є вимірювання кутів і їх зрівнювання. Зобразимо графічно геодезичний чотирикутник (рис.10.2).

Для визначення координат пунктів *В* і *Ф* незалежно і рівноточно виміряні кути, які позначені на рис. 10.2 цифрами від 1 до 8. Значення виміряних кутів наведені в табл. 10.2. Послідовність процедур зрівнювання викладені в п.п.10.3.

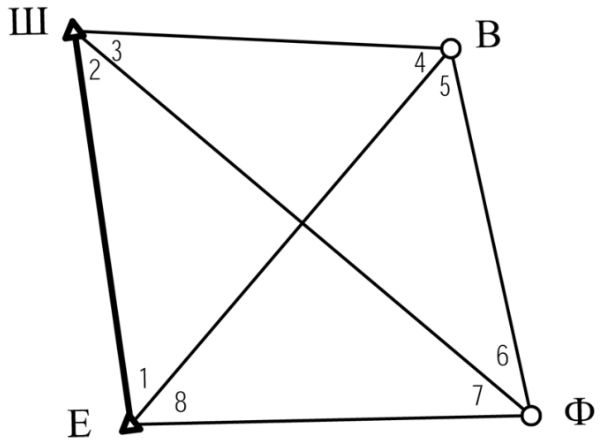


Рис. 10.2 – Геодезичний чотирикутник

Задамо число незалежних вимірів $n = 8$. Кількість шуканих невідомих $t = 2 \cdot 2 = 4$. Отже, число надмірних вимірів складає $r = 8 - 4 = 4$.

Таблиця 10.1 – Координати пунктів

Назва пункту	**Наближені координати**		**Поправки**		**Вихідні і зрівняні координати**	
	X_0	Y_0	δ_X, м	δ_Y, м	X	Y
Е	-	-	-	-	308850,753	7019116,367
Ш	-	-	-	-	311709,975	7018762,587
В	311505,624	7022133,237	0,009	0,032	311505,633	7022133,268
Ф	308670,747	7021762,938	0,010	-0,029	308670,757	7021762,909

Таблиця 10.2 – Результати вимірів і зрівнювання кутів

№ кута	**Вільні члени, (с)**	**Кути, обчислені за наближеними координатами**	**Виміряні кути**	**Поправки, (с)**	**Зрівняні кути**
1	0	55° 42' 19,70"	55° 42' 19,70"	0,74	55° 42' 20,44"
2	0	37° 34' 39,57"	37° 34' 39,57"	-0,64	37° 34' 38,93"
3	0	41° 53' 57,90"	41° 53' 57,90"	1,30	41° 53' 59,20"
4	1,22	44° 49' 02,83"	44° 49' 01,61"	-0,17	44° 49' 01,44"
5	3,98	41° 12' 35,85"	41° 12' 31,87"	0,39	41° 12' 32,26"
6	-4,63	52° 04' 23,42"	52° 04' 28,05"	-0,95	52° 04' 27,10"
7	-1,15	41° 28' 40,23"	41° 28' 41,38"	0,12	41° 28' 41,50"
8	0	45° 14' 20,50"	45° 14' 20,50"	-1,36	45° 14' 19,14"

За виміряними кутами обчислимо наближені координати, шуканих точок *В* і *Ф*. Для цього скористаємося відомими в геодезії формулами англійського вченого Т. Юнга (1773 – 1829 р.р), який запропонував метод визначення координат використовуючи котангенси кутів трикутника (рис. 10.3).

Томас Юнг (1773 – 1829) – англійський фізик, лікар, астроном, один з творців хвилевої теорії світла. Володіючи різносторонніми здібностями і інтересами, Юнг вже у вісім років займався геодезією і математикою. Підлітком знав латинь, старогрецьку, староєврейську, італійську і французьку мови, вивчав арабську мову, а також історію і медицину в Кембріджі.

У 21 рік став членом Лондонського королівського Товариства (1794), в 1802 – 1829 був його секретарем. У 1801 – 1803 був професором Королівського інституту в Лондоні. З 1811 року до кінця життя працював лікарем в лікарні Святого Георгія в Лондоні. Одночасно з 1818 року секретар Бюро довгот і редактор «Мореходного календаря».

Напис на монументі з профілем Томаса Юнга

«Присвячується пам'яті Томаса Юнга – Доктора медицини, члена і секретаря з іноземного листування Королівського Товариства, члена Національного Інституту Франції, людині однаково видатній майже в кожному розділі людського знання, терплячого і інтуїтивного розуміння, що безперервно працював, обдарованого здібністю, що проявив рівну майстерність в найбільш глибоких дослідженнях як літератури, так і науки».

Рис. 10.3 – Історична довідка про Томаса Юнга

Для обчислення координат шуканих точок рекомендується зробити схематичне креслення трикутника (рис. 10.4).

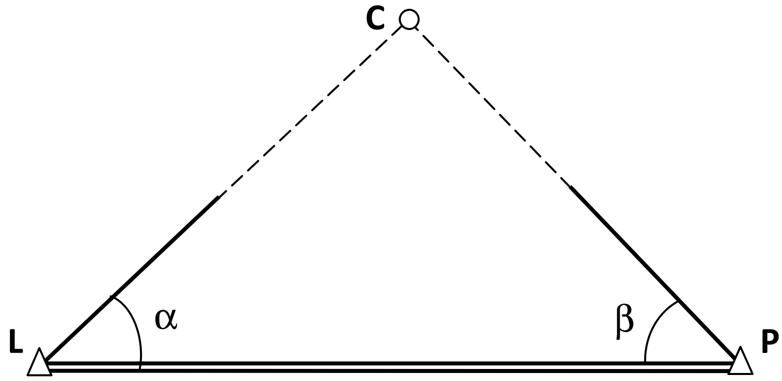


Рис. 10.4 – Допоміжне креслення трикутника

При позначенні вершин трикутника керуються наступними правилами: якщо дивитися з середини початкової сторони на шуканий пункт, то зліва має бути вихідний пункт L і виміряний кут α, а справа – вихідний пункт P і виміряний кут β.

Обчислення виконуються за формулами:

$$X_C = \frac{X_L ctg\, \beta + X_P ctg \alpha + Y_P - Y_L}{ctg\, \alpha + ctg\, \beta},$$

$$Y_C = \frac{Y_L ctg\, \beta + Y_P ctg \alpha + X_P - X_L}{ctg\, \alpha + ctg\, \beta}, \qquad (10.46)$$

де X_L, Y_L, X_P, Y_P – координати лівого L і правого пункту P, відповідно.

Для контролю обчислень координат пункту L, координати пунктів P (лівий) і C (правий) приймають за вихідні, а кут в пункті C рівним $180° - (\alpha + \beta)$.

Застосовуючи ці правила і формули Юнга до трикутників *Δ ШЕВ* і *Δ ШЕФ* геодезичного чотирикутника (рис. 10.2) отримаємо наближені координати шуканих пунктів, які занесемо до табл. 10.3.

Таблиця 10.3 – Обчислення наближених координат шуканих пунктів

Найменування пунктів	**Виміряні кути**	**Координати**	
		$\mathbf{X_C}$	$\mathbf{Y_C}$
Ш	79° 28' 37,47"	311709.975	7018762.587
Е	55° 42' 19,70"	308850.753	7019116.367
В	44° 49' 02,83"	311505.624	7022133.237
Ш		311709.975	7018762.587
Ш	37° 34' 39,57"	311709.975	7018762.587
Е	100° 56' 40,20"	308850.753	7019116.367
Ф	41° 28' 40,23"	308670.747	7021762.938
Ш		311709.975	7018762.587

Обчислені наближені координати пунктів *В* і *Ф* занесемо до табл. 10.1.

Складемо рівняння поправок виміряних кутів. Для цього графічно на рис. 10.5 покажемо виміряні кути.

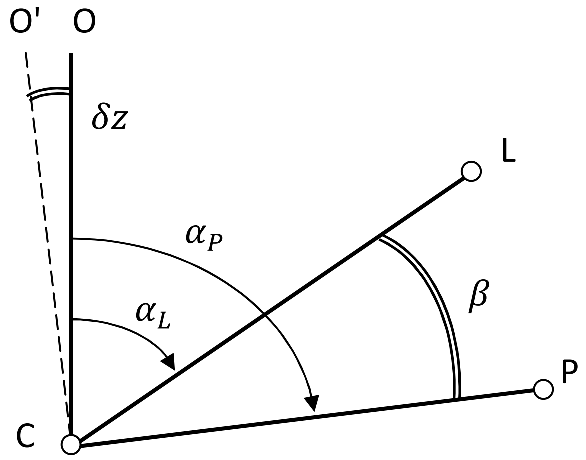


Рис. 10.5 – Ілюстрація виміряних напрямків

Тут показано, що на пункті C виміряні напрями на пункти L і P щодо нульового напряму *O*.

Відповідно до (10.7) рівняння поправок напрямів *CL* і *CP* мають вигляд:

$$
\begin{aligned}
-\delta z + a_L\delta x_L + b_L\delta y_L + c_L\delta x_C + e_L\delta y_C + l_L = v_L,\\
-\delta z + a_P\delta x_P + b_P\delta y_P + c_P\delta x_C + e_P\delta y_C + l_P = v_P,
\end{aligned} \qquad (10.46)
$$

де δz – поправка нульового напряму (нульового діаметру лімба) $\delta x, \delta y$ – поправки до наближених координат.

Відомо, що кут β дорівнює різниці напрямів, тобто: $\beta = \alpha_P - \alpha_L$.

Віднімаючи в системі рівнянь (10.46) з другого рівняння перше, отримаємо:

$$
\begin{aligned}
-a_L\delta x_L - b_L\delta y_L + a_P\delta x_P + b_P\delta y_P - (c_L - c_P)\delta x_C -\\
-(e_L - e_P)\delta y_C + l_\beta = v_\beta,
\end{aligned} \qquad (10.47)
$$

де v_β – поправка для виміряного кута β.

Введемо позначення:

$$\Delta X_L = X_L^0 - X_C^0;\ \Delta X_P = X_P^0 - X_C^0;\ \Delta Y_L = Y_L^0 - Y_C^0;\ \Delta Y_P = Y_P^0 - Y_C^0.$$

Наближені значення дирекційних кутів і довжин ліній *CL* і *CP* знайдемо за формулами:

$$
\begin{aligned}
tg\ \alpha_L = \frac{\Delta Y_L}{\Delta X_L}, tg\ \alpha_P = \frac{\Delta Y_P}{\Delta X_P},\\
d_L^2 = \Delta X_L^2 + \Delta Y_L^2, d_P^2 = \Delta X_P^2 + \Delta Y_P^2.
\end{aligned} \qquad (10.48)
$$

На підставі (10.6) і з урахуванням отриманих формул (10.48) знайдемо значення коефіцієнтів *a*, *b*, *c*, *e*, у виразі (10.47). Отримуємо:

$$
\begin{aligned}
a_L = \frac{\partial\alpha_L}{\partial X_L} = -\rho\frac{\sin\alpha_L\cos\alpha_L}{\Delta X_L} = -\rho\frac{\sin\alpha_L d_L}{d_L d_L} = -\rho\frac{\Delta Y_L}{\Delta X_L^2 + \Delta Y_L^2},\\
b_L = \frac{\partial\alpha_L}{\partial Y_L} = \rho\frac{\sin\alpha_L\cos\alpha_L}{\Delta Y_L} = \rho\frac{\cos\alpha_L d_L}{d_L d_L} = \rho\frac{\Delta X_L}{\Delta X_L^2 + \Delta Y_L^2},\\
c_L = \frac{\partial\alpha_L}{\partial X_C} = \rho\frac{\sin\alpha_L\cos\alpha_L}{\Delta X_L} = \rho\frac{\Delta Y_L}{\Delta X_L^2 + \Delta Y_L^2} = -a_L,\\
e_L = \frac{\partial\alpha_L}{\partial Y_C} = -\rho\frac{\Delta Y_L}{\Delta X_L^2 + \Delta Y_L^2} = -b_L.
\end{aligned}
$$

За аналогією знайдемо коефіцієнти $a_P,\ b_P,\ c_P,\ e_L$:

$$
a_P = \frac{\partial\alpha_P}{\partial X_P} = -\rho\frac{\Delta Y_P}{\Delta X_P^2 + \Delta Y_P^2}, \qquad b_P = \frac{\partial\alpha_P}{\partial Y_P} = \rho\frac{\Delta X_P}{\Delta X_P^2 + \Delta Y_P^2},
$$

$$
c_P = \frac{\partial\alpha_P}{\partial X_C} = -a_P, \qquad e_P = \frac{\partial\alpha_P}{\partial Y_C} = -b_P.
$$

Підставляючи знайдені значення коефіцієнтів в рівняння (10.47) отримаємо рівняння поправок в остаточному вигляді:

$$\rho\frac{\Delta Y_L}{{\Delta X_L}^2+{\Delta Y_L}^2}\delta x_L-\ \rho\frac{\Delta X_L}{{\Delta X_L}^2+{\Delta Y_L}^2}\delta y_L-\rho\frac{\Delta Y_P}{{\Delta X_P}^2+{\Delta Y_P}^2}\delta x_P+$$
$$+\rho\frac{\Delta X_P}{{\Delta X_P}^2+{\Delta Y_P}^2}\delta y_P-\ \rho\left(\frac{\Delta Y_L}{\Delta X_L^2+\Delta Y_L^2}-\frac{\Delta Y_P}{\Delta X_P^2+\Delta Y_P^2}\right)\delta x_C+$$
$$+\rho\left(\frac{\Delta X_L}{\Delta X_L^2+\Delta Y_L^2}-\frac{\Delta X_P}{\Delta X_P^2+\Delta Y_P^2}\right)\delta y_C+l_\beta=V_\beta\ . \qquad (10.49)$$

Вільний член рівняння поправок обчислимо за формулою:

$$l_\beta=\beta_{обч}-\beta_{вим}\ , \qquad (10.50)$$

де

$$tg\ \beta_{\text{обч}}=\frac{\Delta X_L\Delta Y_P-\Delta X_P\Delta Y_L}{\Delta X_L\Delta Y_P+\Delta Y_L\Delta Y_P}\,.$$

Зважаючи, що в координати початкових пунктів поправки не вводяться, а також для зручності обчислень коефіцієнтів і значень кутів геодезичного чотирикутника (рис. 10.2) зведемо формальні співвідношення їх обчислення до табл. 10.4.

Таблиця 10.4 – Формули для обчислення коефіцієнтів рівняння поправок і тангенсів кутів, обчислених за наближеними координатами

Кут/ пункт	**Поправки до наближених координат**			
	δX_B	***δY_B***	***δX_Ф***	***δY_Ф***
1/Е	$-\rho\frac{\Delta Y_{\text{ЕВ}}}{\Delta X_{\text{ЕВ}}^2+\Delta Y_{\text{ЕВ}}^2}$	$\rho\frac{\Delta X_{\text{ЕВ}}}{\Delta X_{\text{ЕВ}}^2+\Delta Y_{\text{ЕВ}}^2}$	————	————
2/Ш	————	————	$\rho\frac{\Delta Y_{\text{ШФ}}}{\Delta X_{\text{ШФ}}^2+\Delta Y_{\text{ШФ}}^2}$	$-\rho\frac{\Delta X_{\text{ШФ}}}{\Delta X_{\text{ШФ}}^2+\Delta Y_{\text{ШФ}}^2}$
3/Ш	$\rho\frac{\Delta Y_{\text{ШВ}}}{\Delta X_{\text{ШВ}}^2+\Delta Y_{\text{ШВ}}^2}$	$-\rho\frac{\Delta X_{\text{ШВ}}}{\Delta X_{\text{ШВ}}^2+\Delta Y_{\text{ШВ}}^2}$	$-\rho\frac{\Delta Y_{\text{ШФ}}}{\Delta X_{\text{ШФ}}^2+\Delta Y_{\text{ШФ}}^2}$	$\rho\frac{\Delta X_{\text{ШФ}}}{\Delta X_{\text{ШФ}}^2+\Delta Y_{\text{ШФ}}^2}$
4/В	$-\rho\frac{\Delta Y_{\text{ВЕ}}}{\Delta X_{\text{ВЕ}}^2+\Delta Y_{\text{ВЕ}}^2}$ $+\rho\frac{\Delta Y_{\text{ВШ}}}{\Delta X_{\text{ВШ}}^2+\Delta Y_{\text{ВШ}}^2}$	$\rho\frac{\Delta X_{\text{ВЕ}}}{\Delta X_{\text{ВЕ}}^2+\Delta Y_{\text{ВЕ}}^2}$ $-\rho\frac{\Delta X_{\text{ВШ}}}{\Delta X_{\text{ВШ}}^2+\Delta Y_{\text{ВШ}}^2}$	————	————
5/В	$-\rho\frac{\Delta Y_{\text{ВФ}}}{\Delta X_{\text{ВФ}}^2+\Delta Y_{\text{ВФ}}^2}$ $+\rho\frac{\Delta Y_{\text{ВЕ}}}{\Delta X_{\text{ВЕ}}^2+\Delta Y_{\text{ВЕ}}^2}$	$\rho\frac{\Delta X_{\text{ВФ}}}{\Delta X_{\text{ВФ}}^2+\Delta Y_{\text{ВФ}}^2}$ $-\rho\frac{\Delta X_{\text{ВЕ}}}{\Delta X_{\text{ВЕ}}^2+\Delta Y_{\text{ВЕ}}^2}$	$\rho\frac{\Delta Y_{\text{ВФ}}}{\Delta X_{\text{ВФ}}^2+\Delta Y_{\text{ВФ}}^2}$	$-\rho\frac{\Delta X_{\text{ВФ}}}{\Delta X_{\text{ВФ}}^2+\Delta Y_{\text{ВФ}}^2}$

Продовження таблиці 10.4

6/Ф	$-\rho\dfrac{\Delta Y_{\text{ФВ}}}{\Delta X^2_{\text{ФВ}}+\Delta Y^2_{\text{ФВ}}}$	$\rho\dfrac{\Delta X_{\text{ФВ}}}{\Delta X^2_{\text{ФВ}}+\Delta Y^2_{\text{ФВ}}}$	$-\rho\dfrac{\Delta Y_{\text{ФШ}}}{\Delta X^2_{\text{ФШ}}+\Delta Y^2_{\text{ФШ}}}$ $+\rho\dfrac{\Delta Y_{\text{ФВ}}}{\Delta X^2_{\text{ФВ}}+\Delta Y^2_{\text{ФВ}}}$	$\rho\dfrac{\Delta X_{\text{ФШ}}}{\Delta X^2_{\text{ФШ}}+\Delta Y^2_{\text{ФШ}}}$ $-\rho\dfrac{\Delta X_{\text{ФВ}}}{\Delta X^2_{\text{ФВ}}+\Delta Y^2_{\text{ФВ}}}$
7/Ф	________	________	$-\rho\dfrac{\Delta Y_{\text{ФЕ}}}{\Delta X^2_{\text{ФЕ}}+\Delta Y^2_{\text{ФЕ}}}$ $+\rho\dfrac{\Delta Y_{\text{ФШ}}}{\Delta X^2_{\text{ФШ}}+\Delta Y^2_{\text{ФШ}}}$	$\rho\dfrac{\Delta X_{\text{ФЕ}}}{\Delta X^2_{\text{ФЕ}}+\Delta Y^2_{\text{ФЕ}}}$ $-\rho\dfrac{\Delta X_{\text{ФШ}}}{\Delta X^2_{\text{ФШ}}+\Delta Y^2_{\text{ФШ}}}$
8/Е	$\rho\dfrac{\Delta Y_{\text{ЕВ}}}{\Delta X^2_{\text{ЕВ}}+\Delta Y^2_{\text{ЕВ}}}$	$-\rho\dfrac{\Delta X_{\text{ЕВ}}}{\Delta X^2_{\text{ЕВ}}+\Delta Y^2_{\text{ЕВ}}}$	$-\rho\dfrac{\Delta Y_{\text{ЕФ}}}{\Delta X^2_{\text{ЕФ}}+\Delta Y^2_{\text{ЕФ}}}$	$\rho\dfrac{\Delta X_{\text{ЕФ}}}{\Delta X^2_{\text{ЕФ}}+\Delta Y^2_{\text{ЕФ}}}$

В табл. 10.5 обчислимо значення приростів координат і тангенсів кутів.

Вільний член l_β рівняння поправок (10.49) обчислимо за формулою (10.50), при цьому попередньо обчислимо значення кутів, результати занесемо до табл. 10.2.

За формулами, наведеними в табл. 10.4 і використовуючи значення приростів ΔY і ΔX (табл. 10.5), обчислимо чисельні значення коефіцієнтів рівнянь поправок. Так як величини приростів ΔY і ΔX вимірюються в метрах, а коефіцієнти a, b, c, e мають розмірність $\text{с}/\text{м}$.

Чисельні значення цих коефіцієнтів у рівнянні поправок (10.49) виявляться дуже великими, що створить труднощі при подальшій обробці і може призвести до втрати точності обчислень.

Щоб уникнути цих незручностей необхідно перейти від розмірності $\text{с}/\text{м}$ до розмірності $\text{с}/\text{см}$. Для цього достатньо зменшити постійну ρ в 100 разів, тобто прийняти $\rho = 2062{,}65$.

З чисельних значень отриманих коефіцієнтів рівнянь формуємо матрицю a

$$a = \begin{pmatrix} -0{,}385 & 0{,}339 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}339 & 0{,}344 \\ 0{,}610 & 0{,}037 & -0{,}339 & -0{,}344 \\ -0{,}224 & -0{,}376 & 0 & 0 \\ -0{,}292 & -0{,}376 & -0{,}093 & 0{,}715 \\ -0{,}093 & 0{,}715 & 0{,}433 & -0{,}372 \\ 0 & 0 & 0{,}436 & -0{,}291 \\ 0{,}385 & -0{,}339 & -0{,}776 & -0{,}053 \end{pmatrix}.$$

Таблиця 10.5 – Результати обчислення кутів за координатами

№ кута	**Напрямок**	**Приріст**		**tg $\beta_{обч}$**	**$\beta_{обч}$**
		ΔX	***ΔY***		
1	ЭШ	2859,222	-353,780	1,46624598	55° 42' 19,70"
	ЭВ	2654,871	3016,870		
2	ШФ	-3039,228	3000,351	0,76948267	37° 34' 39,57"
	ШЭ	-2859,222	353,780		
3	ШВ	-204,351	3370,650	0,89723031	41° 53' 57,90"
	ШФ	-3039,228	3000,351		
4	ВЭ	-2654,871	-3016,870	0,99364812	44° 49' 02,83"
	ВШ	204,351	-3370,650		
5	ВФ	-2834,877	-370,299	0,87574087	41° 12' 35,85"
	ВЭ	-2654,871	-3016,870		
6	ФШ	3039,228	-3000,351	1,28331646	52° 04' 23,42"
	ФВ	2834,877	370,299		
7	ФЭ	180,006	-2646,571	0,88403605	41° 28' 40,23"
	ФШ	3039,228	-3000,351		
8	ЭВ	2654,871	3016,870	1,00837865	45° 14' 20,50"
	ЭФ	-180,006	2646,571		

Транспонуємо матрицю a і помножимо її зліва на таку ж матрицю. У результаті отримаємо матрицю коефіцієнтів нормальних рівнянь

$$A = a^{\mathrm{T}}a = \begin{pmatrix} 0{,}813 & -0{,}111 & -0{,}519 & -0{,}404 \\ -0{,}111 & 1{,}026 & 0{,}595 & -0{,}530 \\ -0{,}519 & 0{,}595 & 1{,}219 & -0{,}081 \\ -0{,}404 & -0{,}530 & -0{,}081 & 0{,}974 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо матрицю, зворотну матриці А

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2{,}628 & 0{,}432 & 1{,}002 & 1{,}408 \\ 0{,}432 & 2{,}125 & -0{,}770 & 1{,}272 \\ 1{,}002 & -0{,}770 & 1{,}632 & 0{,}131 \\ 1{,}408 & 1{,}272 & 0{,}131 & 2{,}315 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо матрицю-стовпець вільних членів нормальних рівнянь

$$\lambda = a^{\mathrm{T}}l = \begin{pmatrix} -1{,}003 \\ -5{,}268 \\ -2{,}877 \\ 4{,}902 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо матрицю-стовпець поправок до наближених координатах. Результати отримаємо в сантиметрах.

$$\delta = -A^{-1}\lambda = \begin{pmatrix} 0{,}887 \\ 3{,}176 \\ 0{,}999 \\ -2{,}855 \end{pmatrix}.$$

Отримані поправки занесемо до табл. 10.1, попередньо зменшивши їх у 100 разів, для того щоб їх розмірність була в метрах.

Обчислимо матрицю-стовпець поправок до виміряних кутів

$$v = a\delta + l = \begin{pmatrix} 0{,}735 \\ -0{,}642 \\ 1{,}301 \\ -0{,}173 \\ 0{,}389 \\ -0{,}946 \\ 0{,}116 \\ -1{,}359 \end{pmatrix}.$$

Отримані результати заносимо до табл. 10.2 і обчислюємо зрівняні кути. Здійснимо контрольні операції.

1. Перевіряємо співвідношення $a^T v = 0$.
2. Сума поправок повинна дорівнювати сумі вільних членів рівнянь поправок.
3. За формулою (10.29) визначимо емпіричну середню квадратичну похибку виміряного кута, а за формулою (10.30) оцінимо її надійність.

$$m = 1{,}18'',$$

$$m_m = 0{,}42''.$$

Позначимо $A^{-1} = Q$, і використовуючи вирази (10.22) знайдемо середні квадратичні похибки положення шуканих пунктів по осях координат:

Пункт B | Пункт Φ

$m_x = m\sqrt{Q_{11}} = 1{,}92$ см, $m_x = m\sqrt{Q_{33}} = 1{,}51$ см,

$m_y = m\sqrt{Q_{22}} = 1{,}72$ см, $m_y = m\sqrt{Q_{44}} = 1{,}80$ см.

За формулою (10.24) знаходимо кругові середні квадратичні похибки положення шуканих пунктів $m_{\text{В}} = 2{,}58$ см, $m_{\Phi} = 2{,}35$ см.

Використовуючи елементи матриці $A^{-1} = Q$, і вирази (10.26) і (10.27) знайдемо параметри еліпса похибок положення шуканих пунктів.

Пункт B	Пункт Φ
$Q_{xx} = 2{,}628,$	$Q_{xx} = 1{,}632,$
$Q_{yy} = 2{,}125,$	$Q_{yy} = 2{,}315,$
$Q_{xy} = 0{,}432,$	$Q_{xy} = 0{,}131,$
$\operatorname{tg} 2\varphi = 1{,}715563,$	$\operatorname{tg} 2\varphi = -0{,}384600,$
$\varphi = 29^0 53',$	$\varphi = 169^0 29',$
$Q_{uu} = 2{,}88,$	$Q_{uu} = 2{,}34,$
$Q_{vv} = 1{,}88,$	$Q_{vv} = 1{,}61,$
$a = 2{,}00$ см,	$a = 1{,}81$ см,
$b = 1{,}62$ см,	$b = 1{,}50$ см.

Побудуємо еліпс похибок на схемі геодезичної мережі. За формулою (10.31) обчислюємо середню квадратичну похибку зрівняного кута $m_{\text{ур}} = 0{,}84''$.

Таким чином, на прикладі пошуку невідомих координат пунктів B та Φ показані основні процедури тріангуляційного методу параметричного зрівнювання.

11. КОРЕЛАТНИЙ СПОСІБ ЗРІВНЮВАННЯ

11.1. Постановка задачі. Умовні рівняння

Вище (див. п.9.2) було відзначено, що існують два підходи до рішення задач зрівнювання систем виміряних геодезичних величин. Один з них параметричний спосіб, який викладено в п.10. Тепер розглянемо другий спосіб – зрівнювання виміряних величин, пов'язаних умовами (корелатний спосіб).

Ідея корелатного способу полягає в знаходженні поправок до виміряних величин через допоміжні невизначені множники, які називають корелатами. Сутність зрівнювання коре латним способом полягає в тому, що задачу знаходження мінімуму функції рівняння розкладеного в ряд Тейлора вирішують способом Лагранжа з визначенням корелат, у результаті чого отримують корелатні рівняння поправок (вектори поправок). Перетворивши рівняння поправок, отримують нормальні рівняння корелат, через які знаходять вірогідніші значення поправок.

Деталізуємо сказане і будемо вважати, що рівно точно виміряні n величин $X_1, X_2, \dots, X_n$, пов'язаних незалежними математичними умовами

$$\varphi_1(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0,$$
$$\varphi_2(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0,$$
$$\dots$$
$$\varphi_r(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0, \qquad (11.1)$$

де X_i, $i = \overline{1,n}$ – істинні значення виміряних величин.

Загальна кількість таких умов дорівнює кількості надлишкових вимірів. Внаслідок неминучих похибок результати рівноточних вимірів l_1, l_2,…, l_n не будуть точно задовольняти умовам (11.1). У результаті в правій частині системи рівнянь (11.1) справедливо записати деяку величину, яка відрізняється від нуля. Такі величини прийнято називати нев'язками, тобто

$$\begin{gathered}\varphi_1(l_1, l_2, \dots, l_n) = W_1,\\ \varphi_2(l_1, l_2, \dots, l_n) = W_2,\\ \dots\\ \varphi_r(l_1, l_2, \dots, l_n) = W_r.\end{gathered} \tag{11.2}$$

Сутність задачі полягає в тому, щоб знайти такі поправки V_1, V_2,…, V_n, до виміряних величин l_1, l_2,…, l_n, які забезпечували б виконання умов (11.1), тобто

$$\begin{gathered}\varphi_1(l_1 + V_1, l_2 + V_2, \dots, l_n + V_n) = 0,\\ \varphi_2(l_1 + V_1, l_2 + V_2, \dots, l_n + V_n) = 0,\\ \dots\\ \varphi_r(l_1 + V_1, l_2 + V_2, \dots, l_n + V_n) = 0\end{gathered} \tag{11.3}$$

Так як кількість невідомих в отриманій системі умовних рівнянь більша за кількість рівнянь, $n > r$, то вона не має однозначного розв'язання і є невизначеною.

Для того щоб знайти поправки V_i, $i = \overline{1,n}$, які найкращим чином зрівнювали б виміряні величин, скористаємося вже відомим методом найменших квадратів $[V^2] = \min$.

Для цього необхідно привести умовні рівняння до лінійного вигляду, розклавши при цьому рівняння (11.3) в ряд Тейлора і обмежуючись при цьому першими членами ступеневого ряду, що мають степінь одиницю, отримаємо:

$$\begin{gathered}\varphi_1(l_1, l_2, \dots, l_n) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial l_1} V_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial l_2} V_2 + \dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial l_n} V_n = 0,\\ \varphi_2(l_1, l_2, \dots, l_n) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial l_1} V_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial l_2} V_2 + \dots + \frac{\partial \varphi_2}{\partial l_n} V_n = 0,\\ \dots\\ \varphi_r(l_1, l_2, \dots, l_n) + \frac{\partial \varphi_r}{\partial l_1} V_1 + \frac{\partial \varphi_r}{\partial l_2} V_2 + \dots + \frac{\partial \varphi_r}{\partial l_n} V_n = 0.\end{gathered} \tag{11.4}$$

Введемо позначення, як це було зроблено в п.10.1 при постановці задачі зрівнювання поправок параметричним способом.

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial l_i} = a_1, \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial l_i} = b_i, \dots, \frac{\partial \varphi_r}{\partial l_i} = r_i, \qquad i = \overline{1,n}. \tag{11.5}$$

З урахуванням введених позначень (11.5), а також нев'язок, які є складовими перших частин системи рівнянь (11.2) представимо умовні рівняння в лінійному вигляді :

$$a_1V_1 + a_2V_2 + \cdots + a_nV_n + W_1 = 0,$$
$$b_1V_1 + b_2V_2 + \cdots + b_nV_n + W_2 = 0,$$
$$\ldots$$
$$r_1V_1 + r_2V_2 + \cdots + r_nV_n + W_r = 0.$$

Або в матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \cdots \\ V_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \cdots \\ W_r \end{pmatrix} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{V} + \boldsymbol{W} = 0. \qquad (11.6)$$

Таким чином, сформульована задача зрівнювання виміряних величин, пов'язаних умовами методом найменших квадратів, а також показаний шлях перетворення рівнянь до лінійного вигляду і представлення їх в матричному вигляді.

11.2. Знаходження умовного мінімуму методом найменших квадратів. Нормальні рівняння корелат і їх розв'язання

Система рівнянь (11.6) так само, як і система рівнянь (11.3) – невизначена $n > r$. Її будемо розв'язувати методом найменших квадратів, тобто враховуючи умову $[V^2] = \min$. В курсі математичного аналізу доведено, що якщо є функція n змінних $u = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, пов'язаних r додатковими умовами

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots\ , \varphi_r(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

причому $r < n$, умовний екстремум функції u може бути знайдений методом, який запропонував Ж.Л. Лагранж.

Історична довідка

Лагранж Жозеф Луї (25.1.1736, Турин, — 10.4.1813, Париж), французький математик та механік, член Паризької АН (1772). Самостійно вивчав математику. В 19 років став професором в артилерійській школі Турина. В 1759 обраний членом Берлінської Академії наук, а в 1766 – 1787 р. був її президентом. З 1795 р. професор нормальної школи. Лагранжу належать також видатні дослідження з різноманітних питань математичного аналізу (формула залишкового члена ряду Тейлора, формула кінцевих приростів, теорія **умовних екстремумів**), теорії чисел, алгебри (симетричної функції коренів рівняння), з диференціальних рівнянь (теорія особливих рішень, метод варіації сталих), з інтерполяції, **математичної картографії**, астрономії та ін.

Характеристика П'єром Симоном Лапласом діяльності Лагранжа

…серед тих, хто найефективнішим чином розширив границі наших знань, Ньютон та Лагранж в найвищому ступені володіли щасливим мистецтвом відкриття нових даних, які являють собою сутність знань…

Використаємо доведення теореми Лагранжа. Для цього розглянемо функцію

$$\Phi = F(x_1, x_2, \dots, x_n) + k_1\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + k_2\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) + \cdots$$
$$\cdots + k_r\varphi_r(x_1, x_2, \dots, x_n), \qquad (11.7)$$

де $k_1, k_2, \cdots, k_r$ – невизначені множники – корелати, які пов'язують між собою умовні змінні $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Перетворимо функцію Ф в систему рівнянь, прирівнявши послідовно кожну складову формули (11.7) до нуля

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = \overline{1, r},$$

а потім прирівняємо до нуля систему з $n + r$ рівнянь з $n + r$ невідомими. В скороченому вигляді можна записати:

$$\underbrace{\varphi_1 = 0,\ \ \varphi_2 = 0, \dots, \varphi_r = 0,}_{r} \quad \underbrace{\Phi_1' = 0,\ \ \Phi_2' = 0, \dots,\ \ \Phi_n'}_{n}.$$

Для складання функції Лагранжа помножимо (11.6) на невизначені множники $-2k_1, -2k_2, \dots, -2k_r$. Отримані вирази підсумуємо і додамо до функції $F = [V^2] = V_1^2 + V_2^2 + \cdots + V_n^2$.

В результаті математичних перетворень отримаємо функцію

$$\Phi = V_1^2 + 2V_1(a_1k_1 + b_1k_2 \cdots + r_1k_r) + V_2^2 - 2V_2(a_2k_1 + b_2k_2 + \cdots + r_2k_r) +$$
$$\cdots + V_n^2 + 2V_n(a_nk_1 + b_nk_2 + \cdots + r_nk_r) - 2(W_1k_1 + W_2k_2 + \cdots + W_rk_r).$$

Знайдемо локальні мінімуми в цій функції. Для цього візьмемо часткові похідні за змінними $V_1,\ V_2,\ \cdots, V_n$ і прирівняємо їх до нуля,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial V_1} = 2V_1 - 2(a_1k_1 + b_1k_2 + \cdots + r_1k_r) = 0,$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial V_2} = 2V_2 - 2(a_2k_1 + b_2k_2 + \cdots + r_2k_r) = 0,$$
$$\cdots$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial V_n} = 2V_n - 2(a_nk_1 + b_nk_2 + \cdots + r_nk_r) = 0.$$

Із отриманої системи рівнянь знаходимо поправки $V_i,\ i = \overline{1, n},$

$$V_1 = a_1k_1 + b_1k_2 + \cdots + r_1k_r,$$
$$V_2 = a_2k_1 + b_2k_2 + \cdots + r_2k_r,$$
$$\cdots$$
$$V_n = a_nk_1 + b_nk_2 + \cdots + r_nk_r .$$

Представимо отриману систему рівнянь в матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \cdots \\ V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & r_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & r_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n & \cdots & r_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \cdots \\ k_r \end{pmatrix}$$

або в скороченому вигляді

$$\mathbf{V} = \mathbf{B}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{K}. \qquad (11.8)$$

Із отриманого співвідношення видно, що для обчислення поправок V_i до виміряних величин необхідно спочатку визначити матрицю **К**, яка являє собою вектор невизначених множників Лагранжа, тобто корелат k_1, k_2,…,k_r

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \end{pmatrix}.$$

Підставимо матрицю **V** із співвідношення (11.8) до формули (11.6) і отримаємо:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{K} + \mathbf{W} = 0\,. \qquad (11.9)$$

Введемо позначення

$$\mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} [aa] & [ab] & \cdots & [ar] \\ [ab] & [bb] & \cdots & [br] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [ar] & [br] & \cdots & [rr] \end{pmatrix}. \qquad (11.10)$$

На підставі співвідношення (11.9) і введеного позначення (11.10) можна записати:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{K} + \mathbf{W} = 0\,. \qquad (11.11)$$

Отриманий вираз являє собою систему нормальних рівнянь, де кількість рівнянь *r* дорівнює кількості невідомих k_i, $i = \overline{1, r}$.

Помножимо (11.10) слева на обратную матрицу $\mathbf{B^{-1}}$, находим столбец коррелат

$$\mathbf{K} = -\mathbf{B^{-1}} \cdot \mathbf{W}\,. \qquad (11.12)$$

Підставимо значення матриці **К** у вираз (11.8), знайдемо стовпчик поправок **V**.

Контроль правильності перетворень здійснюють наступною процедурою. Помножимо вираз (11.8) зліва на транспоновану матрицю-рядок поправок $\boldsymbol{V^T}$. Отримаємо

$$\boldsymbol{V^T} \cdot \boldsymbol{V} = (\boldsymbol{B^T K}) \cdot \boldsymbol{B^T K} = (\boldsymbol{B^T K})^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{V}\,.$$

Виконавши необхідні перетворення, знайдемо $[\boldsymbol{VV}] = \boldsymbol{K^T}(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{V})$, але так як $(\mathbf{BV}) = -\mathbf{W}$, то $[\mathbf{V^2}] = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{W}$, що і підтверджує правильність перетворень.

Упорядкуємо розглянуті вище математичні перетворення і задамо строгий порядок процедур зрівнювання виміряних величин, пов’язаних умовами.

Процедура 1. Визначення кількості і виду умовних рівнянь в системі виміряних геодезичних величин.

Процедура 2. Складання умовних рівнянь з нев’язками W_i, $i = \overline{1, r}$ та їх обчислення.

Процедура 3. Приведення отриманих рівнянь до лінійного вигляду шляхом розкладення їх у ряд Тейлора (11.4 -11.6).

Процедура 4. Складання матриці коефіцієнтів нормальних рівнянь корелат (11.10).

Процедура 5. Обчислення корелат k_i , $i = \overline{1, r}$ з рівняння (11.11).

Процедура 6. Визначення вірогідніших поправок V_1, V_2, $\cdots, V_n$ підставленням корелат в рівняння (11.8).

Процедура 7. Контроль правильності виконаних математичних перетворень.

Таким чином, розглянута процедура знаходження умовного мінімуму методом найменших квадратів. Приведена послідовність розв’язання нормальних рівнянь корелат.

11.3. Оцінка точності функцій зрівняних величин

В попередньому підрозділі приведена послідовність визначення поправок, які дозволяють отримати зрівняні значення виміряних величин, що задовольняють умовам (11.3). На практиці у більшості випадків інтерес представляють не самі зрівняні значення виміряних величин (горизонтальних кутів і напрямків, довжин ліній, перевищень і т.д.), а їх функції (координати та висоти точок, площі ділянок та ін.). Тому виникає задача оцінки точності функцій зрівняних значень виміряних величин. Розглянемо сутність вирішення цієї задачі.

Нехай є деяка функція

$$u = u\left(l_1 + V_{1,}\ l_2 + V_2, \dots, l_n + V_n\right). \tag{11.13}$$

Необхідно знайти її середню квадратичну похибку m_u. Будемо враховувати, що поправки V_i, $i = \overline{1, n}$ отримані з сумісного зрівнювання, а вираз (11.13), є функцією незалежних величин. Тоді оцінка точності функцій зрівняних величин, як і при оцінці точності зрівняних значень невідомих (см. п.10.4), буде мати свої особливості.

Для відокремлення поправок V_i від безпосередньо виміряних величин l_i розкладемо функцію (11.13) в ряд Тейлора, обмежуючись при цьому першими членами ступеневого ряду, що мають степінь, яка дорівнює одиниці. Тоді аналогічно до рівняння (11.4) справедливо записати

$$u = u(l_1, l_2, \dots, l_n) + \frac{\partial u}{\partial l_1} V_1 + \frac{\partial u}{\partial l_2} V_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial l_n} V_n. \tag{11.14}$$

Введемо позначення для часткових похідних

$$\frac{\partial u}{\partial l_i} = f_i, \qquad i = \overline{1, n}\,, \tag{11.15}$$

і представимо з урахуванням введених позначень вираз (11.14) в матричному вигляді

$$u = u(l_1, l_2, \dots, l_n) + (f_1, f_2, \dots, f_n)\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ V_n \end{pmatrix}. \qquad (11.16)$$

Враховуючи матричну форму представлення умовних рівнянь (11.6) і процедуру їх перетворення для виділення вектора-стовпця $\mathbf{V_i}$ (11.8), а також введених позначень для знаходження корелат (11.10) і остаточної формули для їх обчислення (11.12), можна шукану матрицю $\mathbf{V_i}$ представити через матрицю нев'язок умовних рівнянь

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ V_n \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & r_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & r_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & \cdots & r_n \end{pmatrix}\mathbf{B^{-1}} \cdot \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \dots \\ W_r \end{pmatrix} = -\mathbf{B^T} \cdot \mathbf{B^{-1}} \cdot \mathbf{W}. \qquad (11.17)$$

Підставимо отриманий вектор-стовпець в формулу (11.16). Отримаємо

$$u = u(l_1, l_2, \dots, l_n) - \mathbf{F} \cdot \mathbf{B^T} \cdot \mathbf{B^{-1}} \cdot \mathbf{W},$$

де $\mathbf{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$.

Вираз (11.17) представляє u як функцію незалежних рівноточних вимірів, середні квадратичні похибки яких дорівнюють $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = m$. Для знаходження середньої квадратичної похибки цієї функції використаємо доказ основної теореми теорії похибок (см.п.10.4) отримаємо:

$$\mathbf{M_u^2} = m^2\left(\frac{\partial u}{\partial l_1, \partial l_2, \dots, \partial l_n} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{B^T} \cdot \mathbf{B^{-1}} \cdot \frac{\partial W}{\partial l_1, \partial l_2, \dots, \partial l_n}\right) \times$$
$$\times\left(\frac{\partial u}{\partial l_1, \partial l_2, \dots, \partial l_n} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{B^T} \cdot \mathbf{B^{-1}} \cdot \frac{\partial W}{\partial l_1, \partial l_2, \dots, \partial l_n}\right)^{\mathrm{T}}, \qquad (11.18)$$

де $\frac{\partial u}{\partial l_1, \partial l_2, \dots, \partial l_n}$ і $\frac{\partial W}{\partial l_1, \partial l_2, \dots, \partial l_n}$ – Якобіани. Тоді приймаючи до уваги рівність (11.15), можна записати:

$$\frac{\partial u}{\partial l_1, \partial l_2, \dots, \partial l_n} = (f_1, f_2, \dots, f_n) = \mathbf{F}. \qquad (11.19)$$

На підставі того, що в результатах рівноточних вимірів існують нев'язки і формально їх записують у вигляді системи рівнянь (11.6), а також позначення (11.5) отримаємо Якобіани нев'язок:

$$\frac{\partial W}{\partial l_1, \partial l_2, \dots, \partial l_n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial l_1, \partial l_2, \dots, \partial l_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial l_1, \partial l_2, \dots, \partial l_n} \\ \dots \\ \frac{\partial u_r}{\partial l_1, \partial l_2, \dots, \partial l_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{pmatrix} = \mathbf{B}. \qquad (11.20)$$

Підставляючи вирази (11.19) і (11.20) в формулу (11.18) отримаємо:

$$\mathbf{M_u^2} = m^2\{(\mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{B^T} \cdot \mathbf{B^{-1}} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{B^T} \cdot \mathbf{B^{-1}} \cdot \mathbf{B})^T\}. \qquad (11.21)$$

В отриманому виразі формальні представлення, охоплені фігурними дужками мають ліву і праву частини. Вони взяті в круглі дужки. Ліву частину можна представити у вигляді $\mathbf{F}(\mathbf{E} - \mathbf{B^T} \cdot \mathbf{B^{-1}} \cdot \mathbf{B})$, де $\mathbf{E}$ – одинична матриця розміром $n \times n$, а праву частину, враховуючи симетричність матриці $\mathbf{B^{-1}}$ і $\mathbf{E}$ перетворити у вираз

$$\{\mathbf{F}(\mathbf{E} - \mathbf{B^T} \cdot \mathbf{B^{-1}} \cdot \mathbf{B})\} = (\mathbf{E} - \mathbf{B^T} \cdot \mathbf{B^{-1}} \cdot \mathbf{B})^\mathbf{T} \cdot \mathbf{F^T},$$

Що підтверджує симетричність матриці. Це дає можливість представити вираз (11.21) у вигляді

$$\mathbf{M_u^2} = m^2\mathbf{F}\{(\mathbf{E} - \mathbf{B^T} \cdot \mathbf{B^{-1}} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{E} - \mathbf{B^T} \cdot \mathbf{B^{-1}} \cdot \mathbf{B})^\mathbf{T}\}\mathbf{F^T} =$$
$$= m^2\mathbf{F}(\mathbf{E} - 2\mathbf{B^T} \cdot \mathbf{B^{-1}} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B^T} \cdot \mathbf{B^{-1}} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{B^{-1}}\mathbf{B})\mathbf{F^T}.$$

Перетворимо отриманий вираз з урахуванням того, що $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B^T} = \mathbf{B}$, а $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B^{-1}} = \mathbf{E}$, отримаємо:

$$\mathbf{M_u^2} = m^2\{\mathbf{F}(\mathbf{E} - \mathbf{B^T} \cdot \mathbf{B^{-1}} \cdot \mathbf{B})\mathbf{F^T}\}. \qquad (11.22)$$

Цей вираз представляє собою формулу для обчислення середньої квадратичної похибки функції зрівняних значень безпосередньо виміряних величин.

Проаналізуємо складові виразу (11.22). Матриця-рядок $\mathbf{F^T}$ має розмірність $1 \times$ n. Матриця, яка представляє різність в круглих дужках має розмірність n$\times$ n, а матриця-стовпець $\mathbf{F^T}$ розмірність n$\times$ 1.

Для того щоб переконатися, що в результаті зроблених перетворень не порушена умова рівності кількості лінійних рівнянь і кількості невідомих в них, виконаємо добуток $[1 \times n] \cdot [n \times n] \cdot [n \times 1]$, отримаємо матрицю розмірністю $[1 \times 1]$, що є свідченням виконання заданих умов.

Нагадаємо, що якщо виконують тільки необхідні вимірювання, то задача зрівнювання не виникає. Тоді в формулі (11.22) вираз в круглих дужках буде дорівнювати одиничній матриці $\mathbf{E}$ і формула матиме вигляд:

$$\mathbf{M_u^2} = m^2\mathbf{F} \cdot \mathbf{F^T} = m^2[\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}],$$

Що відповідає середній квадратичній похибці функції безпосередньо і рівноточно виміряних невідомих величин в теорії похибок.

Таким чином, різниця $\mathbf{E} - \mathbf{B^T} \cdot \mathbf{B^{-1}} \cdot \mathbf{B}$ (см. формулу (11.22)) представляє кількісну міру зменшення середньої квадратичної похибки зрівняного значення функцій за відношенням до середньої квадратичної похибки, обчисленої за результатами необхідних вимірів.

Формула (11.22) дозволяє оцінити точність однієї єдиної функції зрівняних величин.

Для одночасної оцінки точності z функцій виконаємо аналогічні процедури. Запишемо систему рівнянь

$$U_1 = U_1(l_1 + V_1,\ \ l_2 + V_2, \dots, l_n + V_n),$$
$$U_2 = U_2(l_1 + V_1,\ \ l_2 + V_2, \dots, l_n + V_n),$$
$$\dots$$
$$U_z = U_z(l_1 + V_1,\ \ l_2 + V_2, \dots, l_n + V_n). \tag{11.23}$$

Розкладемо кожну функцію (3.23) в ряд Тейлора і позначивши $\frac{\partial U_i}{\partial l_j} = f_{ij}$, $i = \overline{1, z}$, $j = \overline{1, n}$, будемо мати

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_1(l_1,\ \ l_2, \dots, l_n) \\ U_2(l_1,\ \ l_2, \dots, l_n) \\ \dots \\ U_z(l_1,\ \ l_2, \dots, l_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1n} \\ f_{21}, f_{22}, \dots, f_{2n} \\ \dots \\ f_{z1}, f_{z2}, \dots, f_{zn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ V_n \end{pmatrix} = \mathbf{U} + \mathbf{FV}. \tag{11.24}$$

Замінимо в отриманій формулі матрицю-стовпець поправок $\mathbf{V}$ добутком матриць $-\mathbf{B^T} \cdot \mathbf{B^{-1}} \cdot \mathbf{W}$**,** яке отримано в (11.17) і виконаємо за аналогією всі інші перетворення, отримаємо:

$$M_U^2 = m^2\{\mathbf{F}(\mathbf{E} - \mathbf{B^T} \cdot \mathbf{B^{-1}} \cdot \mathbf{B})\mathbf{F^T}\}. \tag{11.25}$$

Виразу в фігурних дужках (11.25) відповідає квадратна симетрична матриця розмірністю $z \times z$. Цей факт дає можливість ввести позначення:

$$F(E - B^T \cdot B^{-1} \cdot B)F^T = S^2 = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1z} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2z} \\ \cdots & \cdots & \dots & \cdots \\ S_{z1} & S_{z2} & \cdots & S_{zz} \end{pmatrix}, \tag{11.26}$$

де $S_{ij} = S_{ji}$ – умови симетричності матриці (11.26).

З урахуванням прийнятого позначення формула (11.25) прийме остаточний вигляд

$$M_U^2 = m^2 S^2 = m^2 \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1z} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2z} \\ \cdots & \cdots & \dots & \cdots \\ S_{z1} & S_{z2} & \cdots & S_{zz} \end{pmatrix}. \tag{11.27}$$

Як і в параметричному способі зрівнювання (див.п.2.4) тут елементи матриці S є ваговими коефіцієнтами $S_{11}, S_{22}, \dots, S_{zz}$, які завжди є додатніми. Вони використовуються для оцінки точності сукупності функцій (11.23). Середні квадратичні похибки цих функцій будуть відповідно дорівнювати :

$$m_{U_1} = m\sqrt{S_{11}},\ m_{U_2} = m\sqrt{S_{22}}, \dots,\ m_{U_z} = m\sqrt{S_{zz}}. \tag{11.28}$$

Елементи $S_{ij}, (i \neq j)$ матриці (11.27), розташовані з обох боків головної діагоналі, можуть бути як додатніми, так і від’ємними. Вони є кореляційними моментами, які зумовлені залежністю невідомих функцій (11.23).

11.4. Обчислення середніх квадратичних похибок емпіричних і зрівняних величин поправок

Поправки, отримані із зрівнювання, можуть бути використані для обчислення емпіричної середньої квадратичної похибки. Так як кількість надлишкових вимірів дорівнює кількості умовних рівнянь r, на підставі (10.29) можна записати:

$$m = \sqrt{\frac{[V^2]}{r}}\,. \tag{11.29}$$

Оскільки кількість умовних рівнянь, як правило, не велика, надійність величини m визначає середня квадратична похибка

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2r}}\,. \tag{11.30}$$

Зрівнювання виміряних величин, пов'язаних умовами, так само як і зрівнювання параметричним способом підвищує точність результатів вимірів. Середню квадратичну похибку зрівняних рівноточно виміряних величин з урахуванням (2.35), обчислюють за формулою:

$$m_{\text{ур}} = m\sqrt{1 - \frac{r}{n}}\,. \tag{11.31}$$

Таким чином, отримані співвідношення, за якими обчислюють середні квадратичні похибки емпіричних і зрівняних величин поправок.

11.5. Зрівнювання і оцінка точності нерівноточних вимірів

При знаходженні поправок нерівно точних вимірів використовують метод найменших квадратів, тобто враховують умови (9.3), $\sum_{i=1}^{n} p_i V_i^2 = [pV^2] \rightarrow \min.$

В цьому випадку функція Лагранжа (див.11.2) приймає вигляд:

$$\begin{gathered} \Phi = p_1 V_1^2 - 2V_1(a_1 k_1 + b_1 k_2 + \cdots + r_1 k_r) + \\ + p_2 V_2^2 - 2V_2(a_2 k_1 + b_2 k_2 + \cdots + r_2 k_r) + \\ \cdots \\ + p_n V_n^2 - 2V_n(a_n k_1 + b_n k_2 + \cdots + r_n k_r). \end{gathered}$$

Знайдемо часткові похідні від цієї функції за змінними $V_1, V_2, \dots, V_n$ і прирівняємо їх до нуля

$$\frac{\partial \Phi}{\partial V_1} = 2p_1 V_1 - 2(a_1 k_1 + b_1 k_2 + \cdots + r_1 k_r) = 0,$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial V_2} = 2p_2 V_2 - 2(a_2 k_1 + b_2 k_2 + \cdots + r_2 k_r) = 0,$$

$$\cdots$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial V_n} = 2p_nV_n - 2(a_nk_1 + b_nk_2 + \cdots + r_nk_r) = 0.$$

Знайдемо із отриманої системи рівнянь шукані поправки.

$$V_1 = \frac{a_1}{p_1}k_1 + \frac{b_1}{p_1}k_2 + \cdots + \frac{r_1}{p_1}k_r,$$

$$V_2 = \frac{a_2}{p_2}k_1 + \frac{b_2}{p_2}k_2 + \cdots + \frac{r_2}{p_2}k_r,$$

$$\cdots$$

$$V_n = \frac{a_n}{p_n}k_1 + \frac{b_n}{p_n}k_2 + \cdots + \frac{r_n}{p_n}k_r\,. \qquad (11.32)$$

Рівняння (11.32) відрізняються від аналогічних їм рівнянь (11.8) для рівноточних вимірів знаменниками, які є вагами $p_1, p_2, \dots, p_n$ в правій частині.

Спростимо рівняння (11.32) і приведемо їх до рівно точного вигляду шляхом нескладних перетворень. Для цього помножимо їх почленно на $\sqrt{p_i}$ і введемо наступні позначення

$$V_i\sqrt{p_i} = V_i', \qquad \frac{a_i}{\sqrt{p_i}} = a_i', \qquad \frac{b_i}{\sqrt{p_i}} = b_i', \dots, \frac{r_i}{\sqrt{p_i}} = r_i'.$$

З урахуванням прийнятих позначень системи рівнянь (11.6) і (11.32) можна записати, відповідно, в матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} a_1' \; a_2' \; \cdots \; a_n' \\ b_1' \; b_2' \; \cdots \; b_n' \\ \cdots \\ r_1' \; r_2' \; \cdots \; r_n' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_1' \\ V_2' \\ \cdots \\ V_n' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \cdots \\ W_n \end{pmatrix} = \mathbf{B_p V_p} + \mathbf{W} = \mathbf{B}\frac{1}{\sqrt{p}}\mathbf{V}\sqrt{p} + \mathbf{W} = 0, \qquad (11.33)$$

$$\begin{pmatrix} V_1' \\ V_2' \\ \cdots \\ V_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1' \; b_1' \; \cdots r_1' \\ a_2' \; b_2' \; \cdots \; r_2' \\ \cdots \\ a_n' \; b_n' \; \cdots \; r_n' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \cdots \\ k_r \end{pmatrix} = \mathbf{B_p^T} \cdot \mathbf{K} = \mathbf{V_p}. \qquad (11.34)$$

Підставимо $\mathbf{V_p}$ із (11.34) в формулу (11.33), отримаємо систему нормальних рівнянь корелат

$$\dot{\mathbf{B}}_\mathbf{p} \cdot \mathbf{K} + \mathbf{W} = 0, \qquad (11.35)$$

Яка вирішується добутком отриманого матричного рівняння зліва на обернену матрицю $\mathbf{B_p^{-1}}$

$$\mathbf{K} = -\mathbf{B_p^{-1}} \cdot \mathbf{W}. \qquad (11.36)$$

Підставимо **K** в рівняння (11.34) і знайдемо вектор-стовпець поправок $\mathbf{V_p}$. Для отримання вірогідніших поправок $\boldsymbol{V}$ необхідно $\mathbf{V_p}$ помножити зліва на діагональну матрицю **Q**, елементи якої дорівнюють $q_{ij} = \frac{1}{\sqrt{p_i}}$ $i = \overline{1,n}$ і розташовані на головній діагоналі матриці, а всі інші елементи дорівнюють 0.

$$\mathbf{V} = \mathbf{Q_p} \cdot \mathbf{V_p} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{p_1}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{p_n}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \\ \vdots \\ V_n' \end{pmatrix}. \qquad (11.37)$$

Емпірична середня квадратична похибка одиниця ваги для нерівно точних вимірів обчислюється за формулою:

$$\mu^2 = \sqrt{\frac{[pV^2]}{r}} = \sqrt{\frac{[V'V']}{r}}. \qquad (11.38)$$

Перейдемо до оцінки точності множини функцій, які зрівнюють нерівноточно виміряні величини. Для цього будемо спиратися на доказ основної теореми теорії похибок. Тоді обернена вага сукупності функцій, що має вигляд (11.23) при нерівно точних вимірах буде дорівнювати:

$$\frac{1}{P_U} = \left\{ Q \cdot F \left(\frac{\partial U}{\partial l_1, \partial l_2, \ldots, \partial l_n} + \frac{\partial V_p}{\partial W} \cdot \frac{\partial W}{\partial l_1, \partial l_2, \ldots, \partial l_n} \right) \right\} \times$$
$$\times \left\{ Q \cdot F \left(\frac{\partial U}{\partial l_1, \partial l_2, \ldots, \partial l_n} + \frac{\partial V_p}{\partial W} \cdot \frac{\partial W}{\partial l_1, \partial l_2, \ldots, \partial l_n} \right) \right\}^T. \qquad (11.39)$$

Підставимо в отриманий вираз, аналогічно тому, як це було зроблено в (11.18), значення часткових похідних (11.19) і (11.20), врахуємо прийняті для нерівноточних вимірів позначення $\mathrm{V_i'}, \mathrm{a_i'}, \mathrm{b_i'}, \ldots, \mathrm{r_i'}$, а також приймемо до уваги вирази (11.33-11.35) і (11.37). Виконаємо відповідні перетворення і операції добутку матриць, як це зроблено в п.11.3. В результаті отримаємо обернені ваги сукупності функцій $U_1, U_2, \ldots, U_z$ нерівноточно виміряних величин $\mathrm{l_1}, \mathrm{l_2}, \ldots, \mathrm{l_n}$:

$$\frac{1}{P_U} = \mathbf{S_p} = (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}) \cdot \left(\mathbf{E} - \mathbf{B_p^T} \cdot \mathbf{B_p^{-1}} \cdot \mathbf{B_p}\right) \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F})^{\mathrm{T}}. \qquad (11.40)$$

Тоді, враховуючи перетворення, зроблені в п 11.3 для отримання формули (11.27), середню квадратичну похибку для сукупності функцій U_i, можна записати:

$$\mathbf{M_U^2} = \mu^2 \cdot \mathbf{S_p}.$$

Відзначимо, що елементи матриці $\mathbf{S_p}$ мають той же сенс, що і відповідні ним елементи матриці **S** в формулах (11.27) и (11.28).

Таким чином, розглянута процедура зрівнювання і оцінки точності функцій зрівняних нерівно точних вимірів.

11.6. Застосування метода тріангуляції для зрівнювання виміряних величин, пов'язаних умовами

Для визначення координат X, Y одного пункту в мережі тріангуляції необхідно виміряти два горизонтальних кута. Тобто кількість необхідних вимірів

$$t = 2p,$$

де p – кількість шуканих пунктів.

Таким чином, кількість незалежних умов в мережі, де виміряні n кутів, визначиться з виразу

$$r = n - 2p,$$

У вільній мережі при відсутності вихідних пунктів кількість незалежних умов буде дорівнювати

$$r = n - 2p + 4.$$

При зрівнюванні мереж тріангуляції виникає декілька видів геометричних і тригонометричних умов. Розглянемо їх на прикладах різноманітних типових систем тріангуляції.

11.6.1 Геодезичний чотирикутник

Координати вихідних пунктів Ф, Е (рис. 11.1) приведені в табл. 11.1. Горизонтальні кути виміряні рівно точно. Їх величини приведені в табл. 11.2.

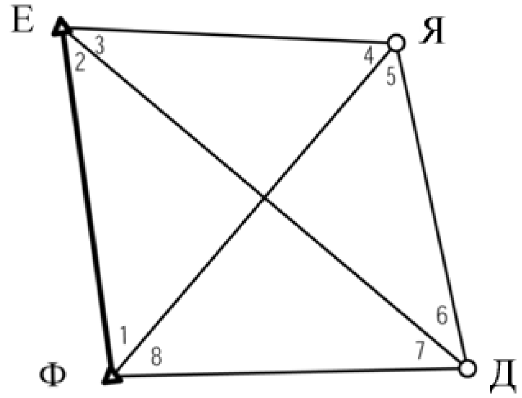


Рис. 11.1 – Геодезичний чотирикутник

Визначаємо кількість надлишкових вимірів

$$r = n - t = 8 - 4 = 4,$$

де n – кількість всіх вимірів; t – кількість невідомих.

Складаємо умовні рівняння. На перший погляд може здатися, що в цій системі – п'ять геометричних умов фігур: трикутники ФЕЯ, ФЯД, ФЕД, ДЕЯ і чотирикутник ФЕЯД. Насправді незалежними тут будуть лише три умови, інші – лінійні комбінації перших трьох.

Таблиця 11.1 – Координати вихідних і шуканих пунктів

Найменування пунктів	**Координати**	
	X	**Y**
Ф	600449,146	7239628,382
Е	6002815,386	7239915,593
Я	6002847,421	7243135,237
Д	600141,020	7243569,854

Таблиця 11.2 – Виміряні і зрівняні кути. Коефіцієнти умовних рівнянь

№	**Виміряні кути**	**Коефіцієнти умовних рівнянь**				**Поправки, сек**	**Зрівняні кути**
		a	**b**	**c**	**d**		
	k=	0,111	-0,621	0,341	0,402		
1	48° 42' 42,83"	1	1	0	0.878	-0.16	48° 42' 42,67"
2	60° 43' 20,49"	1	1	0	-0.561	-0.74	60° 43' 19,75"
3	36° 46' 05,75"	1	0	1	1.338	0.99	36° 46' 06,74"
4	33° 47' 50,98"	1	0	1	-1.494	-0.15	33° 47' 50,83"
5	64° 45' 19,35"	1	-1	0	0.472	0.92	64° 45' 20,27"
6	44° 40' 41,83"	1	-1	0	-1.011	0.33	44° 40' 42,16"
7	31° 43' 42,02"	1	0	-1	1.617	0.42	31° 43' 42,44"
8	38° 50' 15,86"	1	0	-1	-1.242	-0.73	38° 50' 15,13"
	W=	-0,89	2,14	-1,15	-3,513	0,89	360° 00' 00,00"

На підставі (11.6) замість трьох умов фігур в даному випадку зручно мати одну умову фігури – чотирикутника.

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + V_7 + V_8 + W_{\mathrm{I}} = 0, \qquad (11.41)$$

де $W_{\mathrm{I}} = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 + \beta_7 + \beta_8 - 360°$,

і два умовних рівняння сум і різностей

$$\begin{aligned} V_1 + V_2 - V_5 - V_6 + W_{\mathrm{II}} = 0, \\ V_3 + V_4 - V_7 - V_8 + W_{\mathrm{III}} = 0, \end{aligned} \qquad (11.42)$$

де $W_{\mathrm{II}} = \beta_1 + \beta_2 - \beta_5 - \beta_6$,

$W_{\mathrm{III}} = \beta_3 + \beta_4 - \beta_7 - \beta_8$

Як це видно на схемі мережі (рис. 11.1), застосувавши теорему синусів, будемо мати відношення

$$\frac{sin\beta_1 \cdot sin\beta_3 \cdot sin\beta_5 \cdot sin\beta_7}{sin\beta_2 \cdot sin\beta_4 \cdot sin\beta_6 \cdot sin\beta_8} = 1, \qquad (11.43)$$

де β_i – істинні значення кутів.

На підставі (11.3), застосувавши відношення (11.43), отримаємо ще одне рівняння – умовне рівняння полюса

$$\frac{\sin(\beta_1 + V_1) \cdot \sin(\beta_3 + V_3) \cdot sin(\beta_5 + V_5) \cdot sin(\beta_7 + V_7)}{\sin(\beta_2 + V_2) \cdot \sin(\beta_4 + V_4) \cdot sin(\beta_6 + V_6) \cdot sin(\beta_8 + V_8)} - 1 = 0. \qquad (11.44)$$

Таким чином, ми маємо чотири умовних рівняння. Три з яких (11.41), (11.42) представлені в лінійному вигляді. Четверте (11.44) необхідно привести до лінійного вигляду.

Як це було викладено в п. 11.1, розкладемо (11.44) в ряд Тейлора, обмежимось при цьому першими числами розкладення. Для цього знайдемо часткові похідні за змінними β_i в чисельнику

$$d_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial\beta_1} = \frac{cos\beta_1 \cdot sin\beta_3 \cdot sin\beta_5 \cdot sin\beta_7}{sin\beta_2 \cdot sin\beta_4 \cdot sin\beta_6 \cdot sin\beta_8}.$$

Помножимо в цьому виразі чисельник і знаменник на $sin\beta_1$. Після перетворень з урахуванням (11.43) отримаємо

$$d_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial\beta_1} = \frac{cos\beta_1 \cdot sin\beta_1 \cdot sin\beta_3 \cdot sin\beta_5 \cdot sin\beta_7}{sin\beta_1 \cdot sin\beta_2 \cdot sin\beta_4 \cdot sin\beta_6 \cdot sin\beta_8} = ctg\beta_1.$$

Аналогічно

$$d_3 = \frac{\partial\varphi}{\partial\beta_3} = ctg\beta_3, d_5 = \frac{\partial\varphi}{\partial\beta_5} = ctg\beta_5, d_7 = \frac{\partial\varphi}{\partial\beta_7} = ctg\beta_7.$$

Переходимо до знаменника

$$d_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial\beta_2} = -\frac{cos\beta_2 \cdot sin\beta_1 \cdot sin\beta_3 \cdot sin\beta_5 \cdot sin\beta_7}{sin\beta_2 \cdot sin\beta_2 \cdot sin\beta_4 \cdot sin\beta_6 \cdot sin\beta_8} = -ctg\beta_2.$$

Аналогічно

$$d_4 = \frac{\partial\varphi}{\partial\beta_4} = -ctg\beta_4, d_6 = \frac{\partial\varphi}{\partial\beta_6} = -ctg\beta_6, d_8 = \frac{\partial\varphi}{\partial\beta_8} = -ctg\beta_8.$$

Тепер можна записати рівняння (11.44) в лінійному вигляді

$$\begin{gathered} ctg\beta_1 V_1 - ctg\beta_2 V_2 + ctg\beta_3 V_3 - ctg\beta_4 V_4 + ctg\beta_5 V_5 - ctg\beta_6 V_6 + \\ + ctg\beta_7 V_7 - ctg\beta_8 V_8 + W_{IV} = 0 \end{gathered} \qquad (11.45)$$

де

$$W_{IV} = \left(\frac{sin\beta_1 \cdot sin\beta_3 \cdot sin\beta_5 \cdot sin\beta_7}{sin\beta_2 \cdot sin\beta_4 \cdot sin\beta_6 \cdot sin\beta_8} - 1\right)\rho'',$$

множник ρ'' потрібен для переходу від радіанної міри до кутової.

За формулами (11.41), (11.42), (11.45) визначаємо коефіцієнти умовних рівнянь і заносимо їх до відповідних стовпців табл. 11.2

Обчислюємо вільні члени (нев'язки) W умовних рівнянь, які розміщуємо в нижній частині табл. 11.2, – елементи матриці

$$b^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0{,}878 \\ 1 & 1 & 0 & -0{,}561 \\ 1 & 0 & 1 & 1{,}338 \\ 1 & 0 & 1 & -1{,}494 \\ 1 & -1 & 0 & 0{,}472 \\ 1 & -1 & 0 & -1{,}011 \\ 1 & 0 & -1 & 1{,}617 \\ 1 & 0 & -1 & -1{,}242 \end{pmatrix}.$$

Транспонуємо матрицю b^T

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0{,}878 & -0{,}561 & 1{,}338 & -1{,}494 & 0{,}472 & -1{,}011 & 1{,}617 & -1{,}242 \end{pmatrix}$$

Помножимо зліва матрицю b на матрицю b^T . Отримаємо матрицю коефіцієнтів нормальних рівнянь корелат

$$B = b \cdot b^T = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & -0{,}083 \\ 0 & 4 & 0 & 0{,}857 \\ 0 & 0 & 4 & -0{,}531 \\ -0{,}003 & 0{,}857 & -0{,}531 & 10{,}512 \end{pmatrix}.$$

Визначаємо матрицю B^{-1}, обернену до матриці B

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}254 & -0{,}003 & -0{,}021 \\ 0 & -0{,}003 & 0{,}252 & 0{,}013 \\ 0 & -0{,}021 & 0{,}013 & 0{,}097 \end{pmatrix}.$$

Контроль $BB^{-1} = E$.

Обчислюємо за формулою (11.12) корелати

$$k = -B^{-1}W = \begin{pmatrix} 0{,}111 \\ -0.621 \\ 0.341 \\ 0.402 \end{pmatrix}.$$

Записуємо їх в табл. 11.2.

Підставляємо корелати в (11.8), знаходимо поправки

$$V = b^T k = \begin{pmatrix} -0,16 \\ -0,74 \\ 0,99 \\ -0,15 \\ 0,92 \\ 0,33 \\ 0,42 \\ -0,73 \end{pmatrix}.$$

Здійснюємо контроль зрівнювальних обчислень за формулою

$$V^T V = -kW.$$

В результаті маємо

$$V^T V = 3,24, \quad -kW = 3,23,$$

Що не виходить за межі точності обчислень.

Поправки записуємо у відповідний стовпець табл. 11.2 і обчислюємо зрівняні кути.

Якщо підставити зрівняні значення кутів у вирази для обчислення вільних членів формул (11.41), (11.42), (11.45) ми отримаємо нулі.

За формулою (11.29) обчислюємо емпіричну середню квадратичну похибку виміряного кута

$$m = \sqrt{\frac{[VV]}{r}} = 0,90'',$$

За формулою (11.30) оцінюємо її надійність

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2r}} = 0,32''$$

і за формулою (11.31) знаходимо середню квадратичну похибку зрівняного кута

$$m_{\text{зр}} = m\sqrt{1 - \frac{r}{n}} = 0,64''.$$

Використовуючи зрівняні кути за формулами Юнга, обчислюємо координати шуканих пунктів (табл. 11.3).

Таблиця 11.3 – Обчислення координат шуканих пунктів

Найменування пунктів	**Виміряні кути**	**Координати**	
		$\mathbf{X_C}$	$\mathbf{Y_C}$
Е	60° 43' 19,75''	602815,386	7239915,593
Ф	87° 32' 57,80''	600449,146	7239628,382
Д	31° 43' 42,45''	600141,021	7243569,854
Е		602815,386	7239915,593

Е	97° 29' 26,49"	602815,386	7239915,593
Ф	48° 42' 42,67"	600449,146	7239628,382
Я	33° 47' 50,84"	602847,421	7243135,237
Е		602815,386	7239915,593

Тепер необхідно виконати оцінку точності, тобто визначити сукупну середню квадратичну похибку положення шуканих пунктів відносно вихідних. Для спрощення задачі приймемо пункт Ф за начало умовної системи координат, а ось X спрямуємо вздовж лінії ФЕ.

Координати шуканих пунктів в цій системі відповідно дорівнювати

$$X_{Я} = \frac{b \cdot \sin(\beta_2 + \beta_3)}{sin\beta_4} cos\beta_1 = 2803{,}357;$$

$$Y_{Я} = \frac{b \cdot \sin(\beta_2 + \beta_3)}{sin\beta_4} sin\beta_1 = 3192{,}326;$$

$$X_{Д} = \frac{b \cdot \sin\beta_2}{sin\beta_7} cos(\beta_1 + \beta_8) = 169{,}044;$$

$$Y_{Д} = \frac{b \cdot \sin\beta_2}{sin\beta_7} sin(\beta_1 + \beta_8) = 3949{,}882,$$

де $b = \sqrt{(X_{Ф} - X_{Е})^2 + (Y_{Ф} - Y_{Е})^2} = 2383{,}607.$

Тепер на підставі (11.24) необхідно знайти елементи матриці F^T – часткові похідні координат шуканих пунктів за виміряними кутами. Їх значення в приведені в табл. 11.4

За формулами, приведеними в табл. 11.4, обчислюємо елементи матриці F^T

$$F^T = \begin{pmatrix} -1{,}548 & 1{,}359 & -1{,}915 & 0{,}082 \\ -0{,}179 & -0{,}204 & 0{,}046 & 1{,}074 \\ -0{,}179 & -0{,}204 & 0 & 0 \\ -2{,}030 & -2{,}312 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}133 & -3{,}097 \\ 0 & 0 & -1{,}915 & 0{,}082 \end{pmatrix}.$$

Транспонуємо матрицю F^T

$$F = \begin{pmatrix} -1{,}548 & -0{,}179 & -0{,}179 & -2{,}030 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1{,}359 & -0{,}204 & -0{,}204 & -2{,}312 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1{,}915 & 0{,}046 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}133 & -1{,}915 \\ 0{,}082 & 1{,}074 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3{,}097 & 0{,}082 \end{pmatrix}.$$

Таблиця 11.4 – Часткові похідні координат шуканих пунктів за виміряними кутами

	$\partial X_Я$	$\partial Y_Я$	$\partial X_Д$	$\partial Y_Д$
1	$-\frac{X_Я}{\rho"} tg\beta_1$	$\frac{Y_Я}{\rho"} tg\beta_1$	$-\frac{X_Д}{\rho"} tg(\beta_1+\beta_8)$	$\frac{Y_Д}{\rho"} ctg(\beta_1+\beta_8)$
2	$\frac{X_Я}{\rho"} ctg(\beta_2+\beta_3)$	$\frac{Y_Я}{\rho"} ctg(\beta_2+\beta_3)$	$\frac{X_Д}{\rho"} ctg\beta_2$	$\frac{Y_Д}{\rho"} ctg\beta_2$
3	$\frac{X_Я}{\rho"} ctg(\beta_2+\beta_3)$	$\frac{Y_Я}{\rho"} ctg(\beta_2+\beta_3)$	―――	―――
4	$-\frac{X_Я}{\rho"} ctg\beta_4$	$-\frac{Y_Я}{\rho"} ctg\beta_4$	―――	―――
5	―――	―――	―――	―――
6	―――	―――	―――	―――
7	―――	―――	$-\frac{X_Д}{\rho"} ctg\beta_7$	$-\frac{Y_Д}{\rho"} ctg\beta_7$
8	―――	―――	$-\frac{X_Д}{\rho"} tg(\beta_1+\beta_8)$	$\frac{Y_Д}{\rho"} ctg(\beta_1+\beta_8)$

Підставимо матриці F, F^T, b, b^T, B^{-1} у вираз (11.26), отримаємо матрицю S^2, помноживши яку на квадрат емпіричної середньої квадратичної похибки m, знайдемо на підставі (11.25) сукупну похибку положення шуканих пунктів.

$$S^2 = \begin{pmatrix} 2,428 & 0,491 & 1,176 & 1,792 \\ 0,491 & 3,640 & -1,880 & 3,230 \\ 1,176 & -1,880 & 3,391 & -1,164 \\ 1,792 & 3,230 & -1,164 & 4,782 \end{pmatrix},$$

$$M_U^2 = \begin{pmatrix} 1,962 & 0,397 & 0,950 & 1,449 \\ 0,397 & 2,942 & -1,519 & 2,611 \\ 0,950 & -1,519 & 2,741 & -0,941 \\ 1,449 & 2,611 & -0,941 & 3,865 \end{pmatrix}.$$

За елементами матриць M_U^2 і S^2 визначаємо:

1. Із виразу (10.22) – середні квадратичні похибки шуканих пунктів за осями координат

пункт **Я**

$$m_X = \sqrt{1,962} = 1,4 \text{ см},$$

$$m_y = \sqrt{2,942} = 1,7 \text{ см},$$

пункт **Д**

$$m_X = \sqrt{2,741} = 1,7 \text{ см},$$

$$m_y = \sqrt{3,865} = 2,0 \text{ см}.$$

2. За формулою (10.24) – кутові середні квадратичні похибки

$m_Я = \sqrt{1{,}962 + 2{,}942} = 2{,}2$ см, $m_Д = \sqrt{2{,}741 + 3{,}865} = 2{,}6$ см.

3. Замінивши у виразах (2.26) і (2.27) Q_{ij} на S_{ij} – елементи еліпсів похибок положення шуканих пунктів

пункт **Я**	пункт **Д**
$S_{xx} = 2{,}428;$	$S_{xx} = 3{,}391;$
$S_{yy} = 3{,}640;$	$S_{yy} = 4{,}782;$
$S_{xy} = 0{,}491;$	$S_{xy} = -1{,}164;$
$tg2\varphi = \dfrac{2 \cdot 0{,}491}{2{,}428 - 3.640} = -0{,}81;$	$tg2\varphi = \dfrac{2 \cdot 1{,}164}{3{,}391 - 4.782} = 1{,}67;$
$\varphi = 160°30';$	$\varphi = 29°34'$
$S_{UU} = 3{,}81;$	$S_{UU} = 5{,}44;$
$a = 0{,}90\sqrt{3{,}81} = 1{,}8$ см;	$a = 0{,}90\sqrt{5{,}44} = 2{,}1$ см;
$S_{VV} = 2{,}25;$	$S_{VV} = 2{,}73;$
$b = 0{,}90\sqrt{2{,}25} = 1{,}4$ см;	$b = 0{,}90\sqrt{2{,}73} = 1{,}5$ см;

За обчисленими параметрами будуємо еліпси похибок на схемі мережі.

11.6.2 Центральна система

На рис. 11.2 представлена мережа, яка отримала *назву центральна система*.

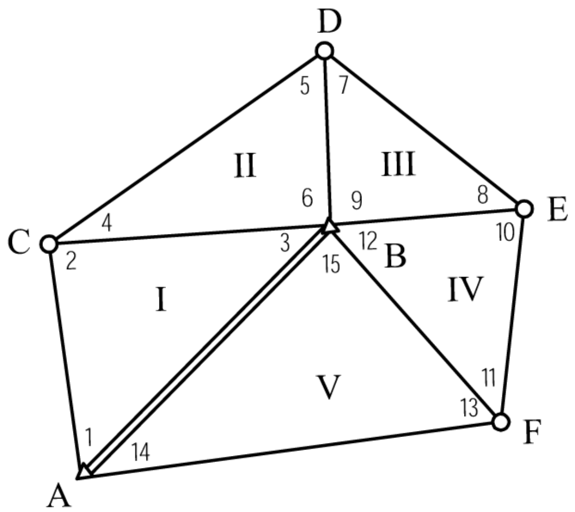


Рис. 11.2 – Центральна система

Виміряні 15 кутів. Шуканих пунктів 4. Кількість умовних рівнянь

$$15 - (4 \cdot 2) = 7.$$

Як це випливає з креслення (рис. 11.2), маємо 5 умовних рівнянь фігур

$$\begin{aligned} &V_1 + V_2 + V_3 + W_I = 0,\\ &V_4 + V_5 + V_6 + W_{II} = 0,\\ &V_7 + V_8 + V_9 + W_{III} = 0,\\ &V_{10} + V_{11} + V_{12} + W_{IV} = 0,\\ &V_{13} + V_{14} + V_{15} + W_V = 0. \end{aligned} \tag{11.46}$$

На пункті *B* виміряні пункти замикають горизонт, тобто їх сума теоретично дорівнює 360°. Звідси виникає ще одна геометрична *умова – умова горизонту*.

$$(\beta_3 + V_3) + (\beta_6 + V_6) + (\beta_9 + V_9) + (\beta_{12} + V_{12}) + (\beta_{15} + V_{15}) - 360° = 0,$$

Якій відповідає умовне рівняння

$$V_3 + V_6 + V_9 + V_{12} + V_{15} + W_{VI} = 0, \tag{11.47}$$

де $W_{VI} = \beta_3 + \beta_6 + \beta_9 + \beta_{12} + \beta_{15} - 360°$.

На підставі теореми синусів може бути записана умова полюса вигляду (11.45)

$$\begin{gathered} ctg\beta_1 V_1 - ctg\beta_2 V_2 + ctg\beta_4 V_4 - ctg\beta_5 V_5 + ctg\beta_7 V_7 - ctg\beta_8 V_8 + \\ + ctg\beta_{10} V_{10} - ctg\beta_{11} V_{11} + ctg\beta_{13} V_{13} - ctg\beta_{14} V_{14} + W_{VII} = 0, \end{gathered} \tag{11.48}$$

де

$$W_{VII} = \left(\frac{sin\beta_1 \cdot sin\beta_4 \cdot sin\beta_7 \cdot sin\beta_{10} \cdot sin\beta_{13}}{sin\beta_2 \cdot sin\beta_5 \cdot sin\beta_8 \cdot sin\beta_{11} \cdot sin\beta_{14}} - 1\right)\rho''.$$

Подальша послідовність зрівнювальних обчислень принципово не відрізняється від розглянутої в п. 11.6.1.

11.6.3 Вставлення в жорсткий кут

Як видно з рис. 11.3, в цій системі виміряні 9 кутів. Шуканих пунктів 2.

Кількість умовних рівнянь

$$9 - (2 \cdot 2) = 5.$$

Маємо три умови фігур

$$\begin{aligned} &V_1 + V_2 + V_3 + W_I = 0,\\ &V_4 + V_5 + V_6 + W_{II} = 0,\\ &V_7 + V_8 + V_9 + W_{III} = 0. \end{aligned} \tag{11.49}$$

В цій мережі кутів *AOB* – жорсткий кут, бо він дорівнює різниці вихідних дирекційних кутів

$$AOB = \alpha_{OB} - \alpha_{OA},$$

де α_{OB}, α_{OA} – дирекційні кути ліній *OA* і *OB*.

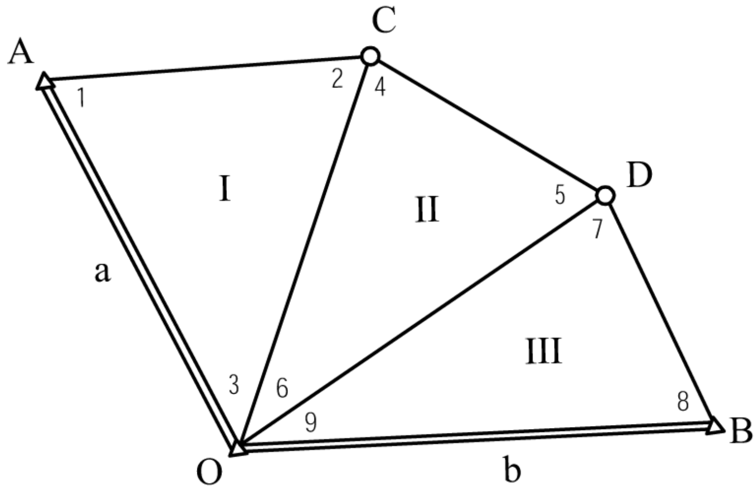


Рис. 11.3 – Вставлення в жорсткий кут

Звідси виникає *умова дирекцій них кутів*

$$(\beta_3 + V_3) + (\beta_6 + V_6) + (\beta_9 + V_9) - (\alpha_{OB} + \alpha_{OA}) = 0,$$

якій відповідає умовне рівняння

$$V_3 + V_6 + V_9 + W_{IV} = 0, \tag{11.50}$$

де $W_{IV} = \beta_3 + \beta_6 + \beta_9 - (\alpha_{OB} + \alpha_{OA})$.

В цій мережі сторони *OA* і *OB* – жорсткі. Як це видно з рис. 11.3, на підставі теореми синусів можна записати *рівняння сторін*

$$\frac{a \cdot \sin(\beta_1 + V_1) \cdot \sin(\beta_4 + V_4) \cdot \sin(\beta_7 + V_7)}{\sin(\beta_2 + V_2) \cdot \sin(\beta_5 + V_5) \cdot \sin(\beta_8 + V_8) \cdot b} = 1.$$

Продиференціювавши це рівняння за змінними $\beta_1, \beta_2, \beta_4, \beta_5, \beta_7, \beta_8$, запишемо умовне рівняння

$$ctg\beta_1 V_1 - ctg\beta_2 V_2 + ctg\beta_4 V_4 - ctg\beta_5 V_5 + ctg\beta_7 V_7 - ctg\beta_8 V_8 + W_V = 0,$$

де

$$W_V = \left(\frac{a \cdot sin\beta_1 \cdot sin\beta_4 \cdot sin\beta_7}{sin\beta_2 \cdot sin\beta_5 \cdot sin\beta_8 \cdot b} - 1\right)\rho''.$$

Послідовність подальшої обробки викладена в п. 11.6.1.

11.6.4 Ланцюг трикутників між двома сторонами, довжини і дирекційні кути яких відомі

В мережі виміряні 15 кутів (рис. 11.4). Так як мережа вільна, кількість шуканих пунктів $p = 6$, приймаючи до уваги, що координати одного з пунктів або відомі, або приймаються умовно. Відповідно кількість незалежних умов буде дорівнювати

$$r = n - 2p + 4 = 15 - 2 \cdot 6 + 4 = 7.$$

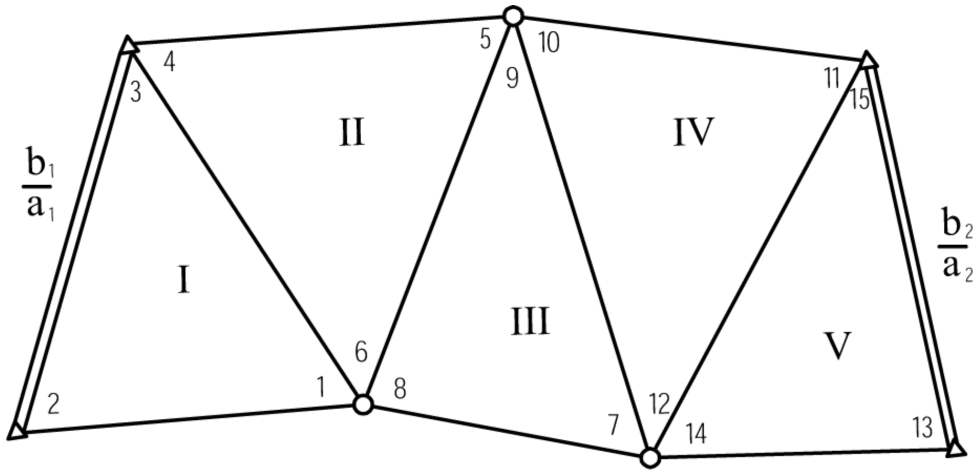


Рис. 11.4 – Мережа трикутників

В цій мережі маємо:

1. П’ять умовних рівнянь фігур

$$\begin{gathered} V_1 + V_2 + V_3 + W_I = 0, \\ V_4 + V_5 + V_6 + W_{II} = 0, \\ V_7 + V_8 + V_9 + W_{III} = 0, \\ V_{10} + V_{11} + V_{12} + W_{IV} = 0, \\ V_{13} + V_{14} + V_{15} + W_V = 0, \end{gathered} \qquad (11.52)$$

2. Умова дирекційних кутів

$$\alpha_1 - (\beta_3 + V_3) + (\beta_6 + V_6) - (\beta_9 + V_9) + (\beta_{12} + V_{12}) - (\beta_{15} + V_{15}) - \alpha_2 = 0,$$

якій відповідає умовне рівняння

$$-V_3 + V_6 - V_9 + V_{12} - V_{15} + W_{VI} = 0, \qquad (11.53)$$

де $W_{VI} = \alpha_1 - \beta_3 + \beta_6 - \beta_9 + \beta_{12} - \beta_{15} - \alpha_2$.

3. На підставі теореми синусів можемо записати умову сторін

$$\frac{b_1 \cdot \sin(\beta_2 + V_2) \cdot \sin(\beta_4 + V_4) \cdot \sin(\beta_8 + V_8) \cdot \sin(\beta_{10} + V_{10}) \cdot \sin(\beta_{14} + V_{14})}{\sin(\beta_1 + V_1) \cdot \sin(\beta_5 + V_5) \cdot \sin(\beta_7 + V_7) \cdot \sin(\beta_{11} + V_{11}) \cdot \sin(\beta_{13} + V_{13}) \cdot b_2} = 1.$$

Продиференцюємо цей вираз за змінними β_i, і отримаємо умовне рівняння

$$\begin{gathered} -ctg\beta_1 V_1 + ctg\beta_2 V_2 + ctg\beta_4 V_4 - ctg\beta_5 V_5 - ctg\beta_7 V_7 + ctg\beta_8 V_8 + \\ +ctg\beta_{10} V_{10} - ctg\beta_{11} V_{11} - ctg\beta_{13} V_{13} + ctg\beta_{14} V_{14} + W_{VII} = 0, \end{gathered}$$

де

$$W_{VII} = \left(\frac{b_1 \cdot sin\beta_2 \cdot sin\beta_4 \cdot sin\beta_8 \cdot sin\beta_{10} \cdot sin\beta_{14}}{sin\beta_1 \cdot sin\beta_5 \cdot sin\beta_7 \cdot sin\beta_{11} \cdot sin\beta_{13} \cdot b_2} - 1\right)\rho''.$$

Послідовність подальшої обробки викладена в п. 11.6.1.

12. ЗРІВНЮВАННЯ СИСТЕМИ ВИМІРЯНИХ ВЕЛИЧИН, ПОВ'ЯЗАНИХ УМОВАМИ, З ДОДАТКОВИМИ НЕВІДОМИМИ

Розглянемо цей спосіб стосовно до зрівнювання мереж полігонометрії. Мережа полігонометрії включає вихідні і шукані пункти. Серед шуканих пунктів слід особливо виділити вузлові точки.

Ходи полігонометрії можуть бути трьох видів:

- хід між двома вихідними пунктами (рис. 12.1 а);
- хід між вихідним пунктом і вузловою точкою (рис. 12.1 б);
- хід між двома вузловими точками (рис. 12.1 в);

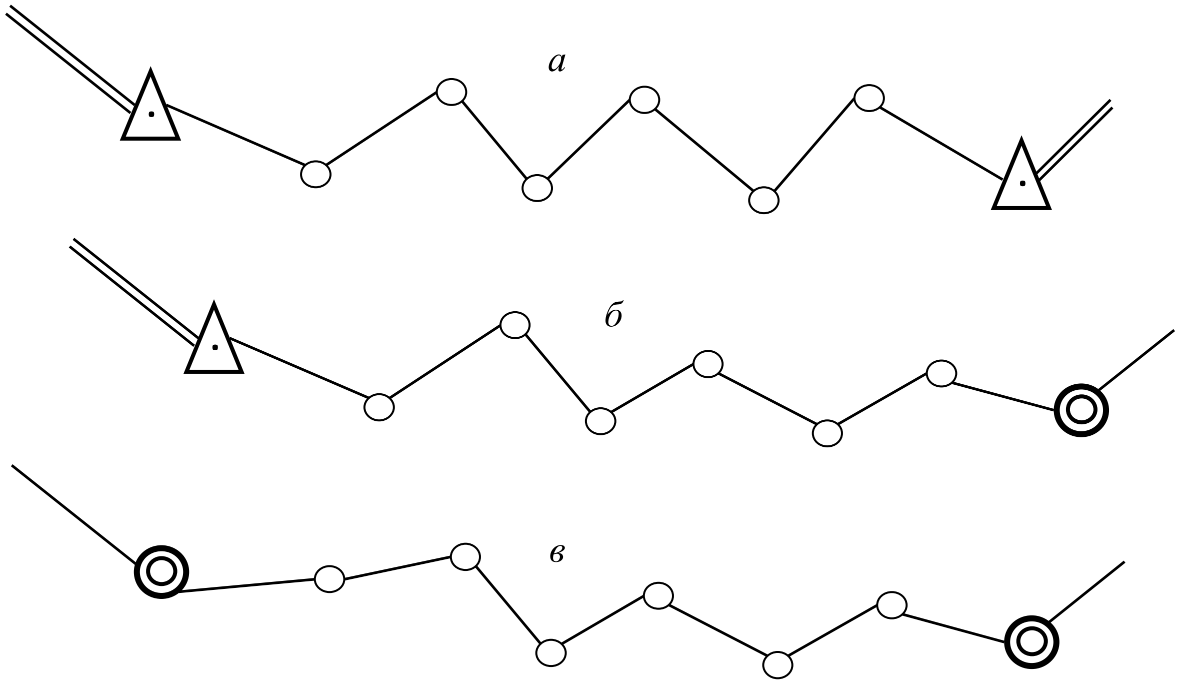


Рис. 12.1 – Полігонометричні ходи

У кожному ході вимірюється n сторін і $n' = n + 1$ кутів. Загальне число вимірів становить $2n + 1$. З іншого боку хід з n сторін включає $n - 1$ шуканих точок, тобто необхідно визначити $2(n - 1)$ координат.

Таким чином, число надлишкових вимірів дорівнюватиме

$$r = (2n + 1) - 2(n - 1) = 3.$$

Отже, в будь-якому ході незалежно від числа шуканих точок виникає тільки три умовні рівняння.

Будемо вважати, кути $\beta_i (i = 1,2, \dots, n')$ виміряними незалежно і рівноточно. Сторони $d_i (i = 1,2, \dots, n)$ також виміряними незалежно і рівноточно, що практично має місце, якщо лінії виміряні світлодальноміром, а сторони мають приблизно однакову довжину.

Так як кути і довжини сторін – об'єкти різного роду, виміри у полігонометрії у загальному випадку – нерівноточні. Звідси виникає необхідність встановлення відносних ваг кутових і лінійних вимірів.

Прийнявши ваги вимірюваних кутів рівними одиниці, тобто $p_\beta = 1$, відповідно з формулами (6.1) і (6.2) з ваги вимірюваних сторін будуть дорівнювати:

$$p_d = \frac{\sigma_\beta^2}{\sigma_d^2},$$

де σ_β і σ_d – стандарти, що характеризують точність вимірювання кутів і довжин сторін відповідно. Ці величини для відповідного класу (розряду) полігонометрії встановлюються нормативними документами. Стосовно до нормативів розробляється методика виконання кутових і лінійних вимірів.

Ваги p_d мають розмірність $\mathrm{с}^2/_{\mathrm{см}^2}$.

Зрівнювання полігонометричного ходу розглянемо на найбільш загальному прикладі ходу між двома вузловими точками, маючи на увазі, що інші два види – окремі випадки від загального.

Отже, в ході виникає три умовних рівняння:

1. Рівняння кутів

$$\sum_{i=1}^{n'} V_\beta + \delta\alpha_{\text{поч}} - \delta\alpha_{\text{кін}} + W_\beta = 0, \tag{12.1}$$

де V_β – поправки в виміряні кути, $\delta\alpha_{\text{поч}}$, $\delta\alpha_{\text{кін}}$ – поправки в наближені дирекційні кути початкових і кінцевих сторін ходу відповідно,

$$W_\beta = \alpha^o_{\text{поч}} - \alpha^{\text{o}}_{\text{кін}} + \sum_{i=1}^{n'} \beta_i - 180^0 n'$$

– кутова нев'язка ходу, $\alpha^o_{\text{поч}}$, $\alpha^{\text{o}}_{\text{кін}}$ – наближені значення дирекційних кутів початкових і кінцевих сторін ходу відповідно.

2. Умова абсцис

$$\sum_{i=1}^{n} V_{\Delta X_i} + \delta x_{\text{поч}} - \delta x_{\text{кін}} + W_x = 0.$$

3. Умова ординат

$$\sum_{i=1}^{n} V_{\Delta Y_i} + \delta y_{\text{поч}} - \delta y_{\text{кін}} + W_y = 0.$$

У цих висловлюваннях прийняті наступні позначення:

$V_{\Delta X_i}$, $V_{\Delta Y_i}$ – поправки в прирості координат, $\delta x_{\text{поч}}$, $\delta x_{\text{кін}}$, $\delta y_{\text{поч}}$, $\delta y_{\text{кін}}$ – поправки до наближених координат початкової та кінцевої точки ходу, $W_x = X^0_{\text{поч}} + \sum_{i=1}^{n} \Delta X_i - X^0_{\text{кін}}$; $W_y = Y^0_{\text{поч}} + \sum_{i=1}^{n} \Delta Y_i - Y^0_{\text{кін}}$ – нев'язки в приростах координат, ΔX_i, ΔY_i – приріст координат, $X^0_{\text{поч}}$, $Y^0_{\text{поч}}$, $X^0_{\text{кін}}$, $Y^0_{\text{кін}}$ – наближені координати початкової і кінцевої точок ходу.

Приріст координат ΔX_i, ΔY_i – функції виміряних сторін і кутів $\Delta X = d\ cos\alpha$, $\Delta Y = d \sin\alpha$, а тому величини залежні.

Ось чому друге і третє умовне рівняння необхідно перетворити, представивши поправки до приростів координат через поправки виміряних кутів та сторін.Опускаючи перетворення, запишемо ці рівняння:

$$\sum_{i=1}^{n} V_{d_i} \cos\alpha_i + \frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{n} Y_i^p \cdot V_{\beta_i} + \frac{1}{\rho}\, Y^p_{\text{поч}}\, \delta\alpha_{\text{поч}} - \frac{1}{\rho} Y^p_{\text{кін}} \delta\alpha_{\text{кін}} +$$

$$+\delta x_{\text{поч}} - \delta x_{\text{кін}} + \frac{1}{\rho} Y^0_{\text{кін}} W_\beta + W_x = 0, \qquad (12.2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} V_{d_i} \sin\alpha_i - \frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{n} X_i^0 \cdot V_{\beta_i} - \frac{1}{\rho}\, X^0_{\text{поч}}\, \delta\alpha_{\text{поч}} + \frac{1}{\rho} X^0_{\text{кін}} \delta\alpha_{\text{кін}} +$$

$$+\delta y_{\text{поч}} - \delta y_{\text{кін}} - \frac{1}{\rho} X^0_{\text{кін}} W_\beta + W_y = 0. \qquad (12.3)$$

Умовні рівняння (12.1), (12.2), (12. 3) окрім поправок до безпосередньо виміряних кутів і довжин сторін містять також поправки до наближених дирекційних кутів $\delta\alpha_{\text{поч}}$, $\delta\alpha_{\text{кін}}$ і поправки до наближених координат $\delta x_{\text{поч}}$, $\delta x_{\text{кін}}$, $\delta y_{\text{поч}}$, $\delta y_{\text{кін}}$, тобто до функцій виміряних величин, як це має місце в параметричному способі. Таким чином, ми маємо справу з поєднанням способу вимірів, пов'язаних умовами, і параметричного способу.

Врівноваження такого роду систем отримало назву спосіб умов з додатковими невідомими.

Розглянемо його більш детально в загальному вигляді. Нехай є система *r* рівнянь, що включає *n* поправок і *t* додаткових невідомих:

$$r\begin{cases} a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n + A_1 \delta x + B_1 \delta y + \cdots + T_1 \delta t + W_1 = 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots + b_n v_n + A_1 \delta x + B_1 \delta y + \cdots + T_1 \delta t + W_1 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \underbrace{r_1 v_1 + r_2 v_2 + \cdots + r_n v_n}_{n} + \underbrace{A_r \delta x + B_r\, \delta y + \cdots + T_r \delta t + W_r}_{t} = 0 \end{cases} \qquad (12.4)$$

або в матричному вигляді:

$$b_{rn}v_{n1} + A_{rt}\delta_{t1} + W_{r1} = O_{r1}.$$

Так як $r < n + t$, де r – число умовних рівнянь, n – число вимірів, t – число додаткових невідомих, система не має єдиного розв'язання.

Для розв'язання під умовою $[v^2] = min$ запишемо функцію Лагранжа:

$$\begin{gathered}\Phi(v_1, v_2, \dots, v_n, \delta x, \delta y, \dots, \delta t) = [v^2] - \\ -2k_1(a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n + A_1\delta x + B_1\delta y + \cdots + T_1\delta t + W_1) - \\ -2k_1(b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_nv_n + A_1\delta x + B_1\delta y + \cdots + T_2\delta t + W_2) - \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -2k_1(r_1v_1 + r_2v_2 + \cdots + r_nv_n + A_r\delta x + B_r\delta y + \cdots + T_r\delta t + W_r).\end{gathered}$$

Взявши часткові похідні за змінними v_1, v_2 ,…, v_n одержимо систему рівнянь наступного вигляду

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1k_1 + b_1k_2 + \cdots + r_1k_r, \\ v_2 &= a_2k_1 + b_2k_2 + \cdots + r_2k_r, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ v_n &= a_nk_1 + b_nk_2 + \cdots + r_nk_r. \end{aligned} \qquad \text{або} \qquad v_{n1} = b_{nr}^T k_{r1} \qquad (12.5)$$

Диференціюючи ту ж систему по змінним δx, δy,…, δt і прирівнявши часткові похідні до нуля, отримаємо систему рівнянь

$$t\begin{cases} A_1k_1 + A_2k_2 + \cdots + A_rk_r = 0 \\ B_1k_1 + B_2k_2 + \cdots + B_rk_r = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \underbrace{T_1\,k_1 + T_2k_2 + \cdots + T_nk_n}_{r} = 0 \end{cases} \qquad \text{або} \qquad A_{tr}^T k_{r1} = O_{t1} \qquad (12.6)$$

Підставимо v з (12.5) в (12.4), приєднаємо до неї систему (11.6), отримаємо матричне рівня (12.7)

$$GK + Z = 0, \qquad (12.7)$$

яке складається з наступних блоків

$$G = \begin{vmatrix} \dfrac{B_{rr}}{A_{tr}} \Big| \dfrac{A_{rt}}{O_{tt}} \end{vmatrix}_{r+t,r+t}, B_{rr} = b \cdot b^T, K_{r+t,1} = \begin{vmatrix} \dfrac{k_{r1}}{\delta_{t1}} \end{vmatrix}, Z_{r+t,1} = \begin{vmatrix} \dfrac{W_{r1}}{O_{t1}} \end{vmatrix}. \qquad (12.8)$$

Розв'язавши систему (12.7)

$$K = -G^{-1}Z,$$

знаходимо кореляти k та поправки до додаткових невідомих δ.

Так як матриця включає нульовий блок, діагональні елементи матриці G^{-1}, які відповідають цьому блоку стають негативними.

Підставивши кореляти в (12.5), отримаємо поправки до виміряних величин – кутів і довжин сторін. Контроль обчислень здійснюється шляхом підстановки зрівняних значень виміряних величин і додаткових невідомих у вирази для обчислення вільних членів (нев'язок) умовних рівнянь. У результаті повинні виходити нулі.

Середня квадратична похибка одиниці ваги в цьому способі зрівнювання обчислюється за формулою:

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{3(R-T)}},$$

а її надійність – за формулою:

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{6(R-T)}},$$

де R – кількість ходів, T – кількість вузлових точок.

Таким чином, на прикладі зрівнювання мережі полігонометрії розглянуто корелатний спосіб зрівнювання систем вимірюваних величин, пов’язаних умовами з додатковими невідомими.

Додаток **А**

ТЕЗАУРУС

Абсолютне вимірювання – вимірювання, засноване на прямих вимірюваннях однієї або декількох основних величин і (або) використанні значень фізичних констант.

Абсолютна похибка дорівнює модулю різниці між оцінкою і межею інтервалу, тобто напівширині надійного інтервалу.

Апостеріорі (лат. a posteriori, буквально - з наступного) знання основане на досвіді, на практиці.

Вага (weight) – в найзагальнішому розумінні: деяке дійсне число f(x), поставлене у відповідності до кожного елемента (об'єкта) x з множини X і вибране таким чином, щоб цю множину можна було упорядкувати, увівши умову: $x < y$, якщо $f(x) < f(y)$.

Вимірювання – сукупність операцій для визначення відношення однієї (вимірюваної) величини до іншої однорідної величини, прийнятої за одиницю, яка зберігається в технічному засобі (засобі вимірів). Значення, що отримані, називають числовим значенням вимірюваної величини, числове значення сумісне з позначенням використаної одиниці називається значенням фізичної величини. Вимірювання фізичної величини дослідним шляхом проводиться за допомогою різних засобів вимірів – мір.

Випадкова похибка – похибка, змінна (за величиною і за знаком) від вимірювання до вимірювання.

Відносне вимірювання – вимірювання відношення величини до однойменної величини, що відіграє роль одиниці, або вимірювання зміни величини відносно однойменної величини, що приймається за початкову.

Відносна похибка дорівнює відношенню абсолютної похибки до оцінки дійсного значення. Переважно цю похибку виражають у відсотках. Величину, зворотну відносній похибці, називають **точністю** вимірів.

Геодезія – система наук про визначення форми і розмірів Землі і про методи вимірювання на земній поверхні для відображення її на планах і картах. Геодезія пов'язана з астрономією, геофізикою, космонавтикою, картографією та ін., широко використовується при проектуванні і будівництві споруд, судноплавних каналів, тощо.

Геодезія підрозділяється на:
- астрономогеодезію, що вивчає фігуру і гравітаційне поле Землі;
- теорію і методи побудови опорної геодезичної мережі;
- топографію;
- прикладну геодезію та інше.

Геодезичні вимірювання перевищень – вид лінійних геодезичних вимірів, у яких вимірюваною геодезичною величиною є різниці висот пунктів (точок).

Геодезичні вимірювання – вимірювання, що проводять у процесі топографо-геодезичних робіт.

Принципом геодезичних вимірів є фізичне явище, покладене в основу геодезичних вимірів. У геодезичних засобах вимірів використовують ряд принципів, які реалізують різні фізичні явища: оптичний, оптико-механічний, оптико-електронний, електромагнітний, імпульсний, фазовий, супутниковий, доплерівський, інтерференційний та інші принципи.

Границя – одне з основних понять математики. Постійна, до якої необмежено наближається деяка змінна величина, залежна від іншої змінної величини, при певній зміні останньої. Простим є поняття «границя числової послідовності», за допомогою якого можуть бути визначені поняття «границя функції», «границя послідовності точок простору» та інші.

Груба похибка (промах) – похибка, яка виникла внаслідок недогляду експериментатора або несправності апаратури (наприклад, якщо експериментатор неправильно прочитав номер поділки на шкалі приладу, якщо відбулося замикання в електричному ланцюзі).

Дисперсія – у математичній статистиці і теорії ймовірності - мера розсіяння (відхилення від середнього). У статистиці дисперсія є середнє арифметичне з квадратів відхилень спостережуваних значень (x_1, x_2...,x_n) випадкової величини, які спостерігають, від їх арифметичної середини.

Емпірика – конкретні, досвідні дані.

Єдність вимірів – стан вимірів, що характеризується тим, що їх результати виражаються в узаконених одиницях, розміри яких у встановлених межах дорівнюють розмірам одиниць, відтвореним первинними еталонами, а похибки результатів вимірів відомі та із заданою вірогідністю не виходять за встановлені межі.

Засіб вимірів – технічний засіб, що призначений для вимірів і має нормовані метрологічні характеристики.

Інструментальні (приладові) похибки - похибки, які визначаються похибками вжитих засобів вимірів і викликані недосконалістю принципу дії, неточністю градуювання шкали, ненаглядністю приладу.

Клас точності – узагальнена характеристика приладу, що характеризує припустимі за стандартом значення основних і додаткових похибок, які впливають на точність вимірювання.

Кореляція – статистичний взаємозв'язок двох або декількох випадкових величин або величин, які можна з деякою припустимою мірою точності вважати за такі. При цьому зміни однієї або декількох з цих величин призводять до систематичної зміни іншої або інших величин. Математичною мірою кореляції двох випадкових величин служить коефіцієнт кореляції.

Критерій – ознака, підстава, мірило оцінки чого-небудь. Особливо виділяють критерії істинності знань. Розрізняють логічні (формальні) і емпіричні (експериментальні) критерії істинності. Формальним критерієм істини служать логічні закони: істинно все, що не містить в собі суперечності, логічно правильне. Емпіричним критерієм істинності служить відповідність знання експериментальним даним. Питанням про критерії істини, що визначають різні філософські школи, займається теорія пізнання або **гносеологія**.

Кутові (геодезичні) вимірювання – вид геодезичних вимірів, у яких вимірюваною геодезичною величиною є горизонтальні і (або) вертикальні кути (зенітні відстані).

Лінійні (геодезичні) вимірювання – вид геодезичних вимірів, у яких вимірюваною геодезичною величиною є довжини сторін геодезичних мереж (відстані або їх різниці).

Логарифм числа b за основою a визначається як показник степеня яку піднесення числа **a**, щоб отримати число b. Позначення: $log_a b$. З визначення виходить, що записи $log_a b = x$ і $a^x = b$ рівнозначні. Приклад: $log_2 8 = 3$ тому, що $2^3 = 8$.

Математичне очікування – поняття середнього значення випадкової величини у теорії ймовірностей.

Методом геодезичних вимірів є сукупність операцій з виконання геодезичних вимірів відповідно до принципу вимірів, виконання яких забезпечує отримання результатів із заданою точністю, що реалізовується

Метод вимірів – прийом або сукупність прийомів порівняння вимірюваної фізичної величини з її одиницею відповідно до реалізованого принципу вимірів. Метод вимірів зазвичай зумовлений пристроєм засобів вимірів.

Методичні похибки – похибки, зумовлені недосконалістю методу, а також спрощеннями, покладеними в основу методики.

Метрологія - наука, що вивчає загальноприйняті основи вимірів, методи і засоби вимірів, одиниці фізичних величин, методи точності вимірів, принципи забезпечення єдності вимірів і одноманітності засобів вимірів. У метрології дуже детально (ретельно) розглядаються такі поняття як: еталони і зразкові засоби вимірів, застосування зразкових засобів вимірів до засобів вимірів,які використовують у виробництві.

Головним завданням і метою метрології є вивчення всіх аспектів вимірів фізичних величин. А також міжнародне сприяння в галузі метрології і законодавчі елементи.

Натуральні числа – числа, які отримують при природному рахунку; нескінченність натуральних чисел позначається N. Таким чином $\mathrm{N} = \{1,2,3 \ldots\}$ (іноді до нескінченності натуральних чисел також відносять нуль, тобто $\mathrm{N} = \{0,1,2,3 \ldots\}$. Натуральні числа щодо складання і множення завжди дають натуральне число (але не віднімання або ділення). Натуральні числа комутативні і асоціативні щодо складання і множення, а множення натуральних чисел дистрибутивне відносно складання.

Натурфілософія – спроба тлумачити і пояснити природу явищ, грунтуючись на результатах, отриманих науковими методами, з метою знайти відповіді на деякі філософські питання. Займається найважливішими природничонауковими поняттями (субстанція, матерія, сила, простір, час та ін.), пізнанням зв'язків і закономірностей явищ природи.

Нев'язка (відхил) – різниця між значенням функції, обчисленим за результатами вимірів, і дійсним її значенням, яке виникає внаслідок неминучих похибок вимірів.

Є декілька різновидів нев'язок. Існує фактична і припустима (знайдена за формулою) нев'язка, за порівнянням із якими визначається якість виконаних робіт. Характеризує якість роботи відносна і абсолютна нев'язка. Нев'язка, що характеризує похибку певного виду вимірів: кутова, лінійна, висотна нев'язка.

Непряме вимірювання – визначення шуканого значення фізичної величини на підставі результатів прямих вимірів інших фізичних величин, функціонально пов'язаних з шуканою величиною.

Нерівноточниі вимірювання – ряд вимірів фізичної величини, виконаних різними за точністю засобами вимірів і/або в різних умовах. Зазвичай нерівноточні вимірювання обробляють з метою отримання результату вимірів, коли неможливо отримати ряд рівноточних вимірів.

Носієм результатів геодезичних вимірів є "основа" – папір, плівка, магнітна стрічка, карта пам'яті і тому подібне, на якому записані результати геодезичних вимірів з метою їх зберігання, передачі і (або) подальшої обробки.

Об'єктами геодезичних вимірів є предмети матеріального світу (місцевості, споруди будівельного майданчика, виробничого приміщення і так далі), які характеризуються однією або декількома геодезичними величинами, що підлягають вимірюванням.

Парадигма – у філософії, соціології – початкова концептуальна схема, модель постановки проблем і їх розв’язання, методів дослідження, пануючих протягом певного історичного періоду в науковому суспільстві.

Похибка вимірювання – оцінка відхилення величини вимірюваного значення величини від її дійсного значення. Похибка вимірювання є характеристикою (мірою) точності вимірювання.

Прецизійність – ступінь близості один до одного незалежних результатів вимірів, отриманих у конкретних регламентованих умовах. Вона залежить тільки від випадкових похибок і не має відношення до дійсного або встановленого значення вимірюваної. Міру прецизійності зазвичай виражають в термінах неточності і обчислюють як стандартне відхилення результатів вимірів. Менша прецизійність відповідає більшому стандартному відхиленню.

Принцип вимірів – фізичне явище або ефект, покладене в основу вимірів.

Прогресуюча (дрейфова) похибка – непередбачувана похибка, змінна в часі. Вона є нестаціонарним випадковим процесом.

Прецизійність (precision) – ступінь близькості один до одного незалежних результатів вимірів, отриманих в конкретних встановлених умовах. Прецизійність залежить тільки від випадкових факторів і не пов'язана з істинним значенням або прийнятим опорним значенням.

Похідна – основне поняття диференційного числення, що характеризує швидкість зміни функції. Визначається як границя відношення приросту функції до приросту її аргументу при наближенні приросту аргументу до нуля, якщо така границя існує. Процес обчислення похідної називається диференціюванням.

Пряме вимірювання – вимірювання, при якому шукане значення фізичної величини отримують безпосередньо.

Равноточниє вимірювання – ряд вимірів фізичної величини, виконаних однаковими за точністю засобами вимірів в одних і тих же умовах.

Раціональні числа – числа, представлені у вигляді дробу m/n $(n=0)$, де m і n – цілі числа. Для раціональних чисел визначені всі чотири «класичні» арифметичні дії: складання, віднімання, множення і ділення (окрім ділення на нуль). Для позначення раціональних чисел використовується знак Q.

Систематична похибка – похибка, що змінюється в часі за певним законом (окремим випадком є постійна похибка, що не змінюється з часом). Систематичні похибка можуть бути пов'язані з помилками приладів (неправильна шкала, калібрування і тому подібне), неврахованими експериментатором.

Середньоквадратичне відхилення або **стандартне відхилення** в теорії ймовірностей і статистиці найбільш поширений показник розсіювання значень випадкової величини відносно її математичного очікування.

Суб'єктивні (операторні) особисті похибки – похибки, збумовлені ступенем уважності, зосередженості, підготовленості і іншими якостями оператора.

Теодолітний хід – це замкнена або розімкнена ламана лінія, точки зламу якої відповідним чином закріплені на місцевості і між ними виміряні відстані і ліві (або праві) кути повороту.

Теорема – твердження, для якого в певній теорії існує доказ (інакше кажучи висновки). Окремим випадком теорем є аксіоми, які приймаються істинними без усяких доказів або обґрунтувань.

Точність засобу вимірів – характеристика якості засобу вимірів, що відображає близькість його похибки до нуля.

Тріангуляція – один з методів створення мережі опорних геодезичних пунктів і сама мережа, створена цим методом; полягає в побудові рядів або мереж трикутників, що примикають один до одного, і у визначенні положення їх вершин у вибраній системі координат. У кожному трикутнику вимірюють усі три кути, а одну з його сторін визначають з обчислень шляхом послідовного розв'язання попередніх трикутників, починаючи від того з них, у якому одна з його сторін отримана з вимірів. Якщо сторона трикутника отримана з безпосередніх вимірів, то вона називається базисною стороною. У минулому замість базисної сторони безпосередньо вимірювали коротку лінію, так званий базис, і від неї шляхом тригонометричних обчислень через особливу мережу трикутників переходили до сторони трикутника. Цю сторону зазвичай називають вихідною стороною, а мережу трикутників, через які вона обчислена, - базисною мережею.

Фізична величина – одна з властивостей фізичного об'єкту, загальна в якісному відношенні для багатьох фізичних об'єктів, але в кількісному відношенні індивідуальна для кожного з них.

Функція – це «закон», за яким кожний елемент x з деякої множини *X* ставиться у відповідність до єдиного елемента *y* з безлічі *Y*.

Хід нівелірний – геодезічний хід, що прокладається способом геометричного нівілірування за допомогою нівеліра. Служить для визначення висот нівілірних знаків (реперів). Нівелірний хід створюється шляхом вимірювання перевищень між точками.

Цілі числа – числа, що отримуються об'єднанням натуральних чисел з множиною негативних чисел і нулем, позначаються $Z = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$. Цілі числа замкнуті щодо складання, віднімання і множення (але не ділення).

Частинна похідна – одне з узагальнених понять похідної на випадок функції декількох змінних.

Чутливість приладу (або чутливість засобу вимірювання) – це реакція на підведення до нього вимірюваної величини. Чутливість може обчислюватися як абсолютна, так і відносна, характеризуючи чутливість у певній відмітці.

Шкала – частина конструкції відлікового пристрою, що складається з відміток і чисел, відповідних до послідовних значень вимірюваної величини. Відмітки можуть бути у вигляді рисок, крапок, зубців та ін. Покажчики можуть бути у вигляді каплевидних, ножевидних і світлових стрілок.

Додаток **Б**

Розподіли випадкових величин

Нормальний розподіл випадкової величини і його характеристика

Випадкова величина ξ має **рівномірний розподіл** на відрізку $[a, b], (a < b)$, якщо $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, x \in [a, b], \\ 0, \quad\quad x \notin [a, b]. \end{cases}$

Характеристична функція: $\varphi(t) = \left(e^{itb} - e^{ita}\right)/(b-a)it$.

Моменти: $E\,\xi^k = \dfrac{b^{k+1} - a^{k+1}}{(b-a)(k+1)}$.

Дисперсія: $D\xi = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Коефіцієнт асиметрії: $\gamma_1 = 0$.

Коефіцієнт ексцесу: $\gamma_2 = {}^{9}\!/_{5}$.

Трикутний розподіл (розподіл Сімпсона). Випадкова величина ξ має **трикутний розподіл** (розподіл Сімпсона) на відрізку $[a, b], (a < b)$ якщо

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{b-a} - \dfrac{2}{(b-a)^2}\,|a + b - 2x|, & x \in [a, b]\ , \\ 0, & x \notin [a, b]\ . \end{cases}$$

Характеристична функція: $\varphi(t) = \left[\dfrac{2\left(e^{itb/2} - e^{ita/2}\right)}{(b-a)it}\right]^2$.

Якості розподілу.

Моменти: $E\,\xi^k = \dfrac{4}{(b-a)^2(k+1)(k+2)}\left[a^{k+2} + b^{k+2} - 2\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^{k+2}\right]$.

Дисперсія: $D\xi = \dfrac{(b-a)^2}{24}$.

Коефіцієнт асиметрії: $\gamma_1 = 0$.

Коефіцієнт ексцесу: $\gamma_2 = -{}^{3}\!/_{5}$.

Додаток **В**

Похідні функцій

Похідні простих функцій:

$$\frac{d}{dx}\,c = 0;\ \ \frac{d}{dx}\,x = 1;\ \ \frac{d}{dx}\,cx = c;\ \frac{d}{dx}\,|x| = \frac{x}{|x|} = \operatorname{sgn} x, \qquad x \neq 0;$$

$$\frac{d}{dx}x^c = cx^{c-1}, \text{коли і визначені;}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-1}) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}\ ;\ \ \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^c}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-c}) = -\frac{c}{x^{c+1}};$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ , \qquad x > 0\ .$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt[n]{x} = \frac{d}{dx}x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}x^{\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}\ , \qquad x > 0\ .$$

Підхідні експоненціальних і логарифмічних функцій:

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x\ ;\ \ \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x\ ;\ \ \frac{d}{dx}\operatorname{tg} x = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}\ ;$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{ctg} x = -\operatorname{cosec}^2 x = \frac{-1}{\sin^2 x}\ ;\ \frac{d}{dx}\sec x = \operatorname{tg} x \sec x;$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x = -\operatorname{ctg} x \operatorname{cosec} x;\ \ \frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\ \frac{d}{dx}\arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arctg} = \frac{1}{1+x^2};\ \ \frac{d}{dx}\operatorname{arcsec} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}};\ \ \frac{d}{dx}\operatorname{arcctg} = \frac{1}{1+x^2};$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccosec} x = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\,.$$

Додаток **Г**

Ряд Тейлора

Ряд Тейлора – це розкладення функції в нескінченну суму степеневих функцій. Ряди Тейлора застосовують при апроксимації функції багаточленами. Приведення рівнянь до лінійного вигляду відбувається шляхом розкладення в ряд Тейлора и відкидання всіх членів вище першого порядку.

Теорема

- Нехай функція $f(x)$ має $n+1$ похідну в деякій околиці точки $a, U(a, \varepsilon)$;
- Нехай $x \in U(a, \epsilon)$;
- Нехай p - довільне додатнє число,

тоді існує точка $\varepsilon \in (x, a)$ при $x < a$ або $\varepsilon \in (a, x)$ при $x > a$:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \left(\frac{x-a}{x-\varepsilon}\right)^p \frac{(x-\varepsilon)^{n+1}}{n!\,p} f^{(n+1)}(\varepsilon)$$

Це формула Тейлора із залишковим членом в загальній формі (форма Шльоміьха-Роша).

Різноманітні форми залишкового члена

У формі Лагранжа:

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)] \qquad p = n+1.$$

У формі Коши:

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)] \qquad p = 1.$$

Навчальне видання

МЕТЕШКІН Костянтин Олександрович

ШАУЛЬСЬКИЙ Дмитро Васильович

МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

В авторській редакції

Комп'ютерне верстання *Д. В. Шаульський*

Дизайн обкладинки *Д. В. Шаульський*

Підп. до друку 09.06.2012 р.
Друк на ризографі
Зам. №

Формат 60 х 84 1/16
Ум. друк. арк. 6,9
Тираж 500 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК №4064 від 12.05.2011 р.